LEÇON N° 39

Problèmes conduisant à une modélisation par des suites ou par des fonctions

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Suites, probabilités, étude de fonctions : dérivées, limites, continuité, étude du signe

Références

— A. SAMIER & C. RASSON, *Suites*. Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math, 2010-2011.
— S. PASQUET, *Ainsi de suite*. URL : `http://mathweb.fr`.
— X. DELAHAYE, *Suites numériques, Cours et exercices*. Première S. URL : `http://xmaths.free.fr/1S/cours/cours.php?nomcours=1Ssuitcours&page=01`.
— M. CUAZ, *Plan d'étude d'une fonction numérique*. Terminale S. URL : `http://mathscyr.free.fr`.
— X. DELAHAYE, *Exercices d'étude de fonctions*. Terminale ES. URL : `http://xmaths.free.fr/TES/exos/index.php`.
— G. COSTANTINI, *Étude de la fonction tangente*. DM de Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`
— P. SALETTE, *Maths, BEP industriels, Seconde professionnelle et Terminale*. Delegrave, Juillet 2002.
— N. HALPERN-HERLA & S. Chenevière (Jaicompris Maths), *Polynôme 2nd degré - trouver le plus grand enclos connaissant la clôture*. Première S, ES, Seconde. URL : `https://www.youtube.com/watch?v=ukxgzV_NdOs`.
— *Sujet - CRPE 2015 Groupement 3*

Table des matières

Dans cette leçon, je vous propose uen courte sélection de problèmes de modélisation par des suites ou par des fonctions. Elles sont extraites des leçons :

— **31 - Problèmes conduisant à une modélisation par des suites**
— **38 - Problèmes conduisant à une modélisation par des fonctions**

de l'ouvrage « Les leçons à l'oral de CAPES de Mathématiques - Session 2018 » Pour plus de problèmes de ce genre, reportez-vous au polycopié disponible sur CBMaths.fr.

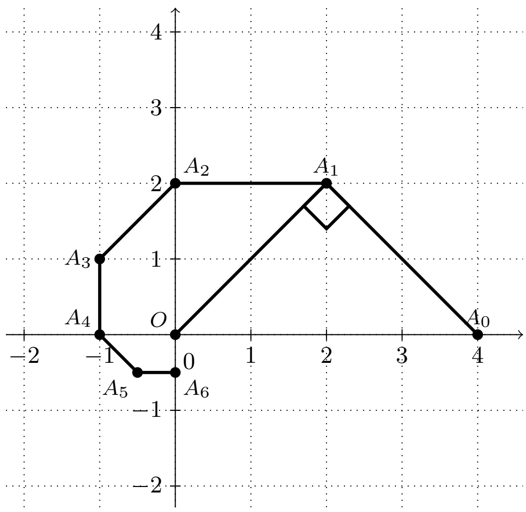
1 Problèmes conduisant à une modélisation par des suites

1.1 Suites et géométrie

Tiré du dossier CAPES Mathématiques n° 5 session 2015

Exercice 1.1. On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A_0 est le point de coordonnées $(4; 0)$. On construit les points A_0, A_1, A_2, ... de telle manière que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle isocèle en A_{n+1}. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme $d_n = A_nA_{n+1}$.

1. (a) Calculer d_0, d_1, d_2.
   (b) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
2. Calculer la longueur de la « spirale infinie » A_0, A_1, A_2, ...



◊ *Solutions.* 1. (a) On veut calculer d_0. On sait que le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle en A_1 donc $OA_1 = A_0A_1$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OA_0^2 = OA_1^2 + A_0A_1^2 \Leftrightarrow OA_0^2 = 2A_0A_1^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{4^2}{2} = d_0^2 \Leftrightarrow d_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On fait de même, pour d_1 et d_2. $d_1 = A_1A_2$, on utilise le théorème de Pythagore en remarquant cette fois-ci que $OA_1 = d_0$.

$$\begin{aligned} OA_1^2 = OA_2^2 + A_1A_2^2 \Leftrightarrow OA_1^2 = 2A_0A_2^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{8})^2}{2} = d_1^2 \Leftrightarrow d_1 = 2 \end{aligned}$$

$d_2 = A_2A_3$.

$$\begin{aligned} OA_2^2 = OA_3^2 + A_2A_3^2 \Leftrightarrow OA_2^2 = 2A_0A_3^2 \\ \Leftrightarrow \frac{2^2}{2} = d_1^2 \Leftrightarrow d_2 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 0$. On veut montrer que $d_{n+1} = qd_n$ avec $q \in \mathbb{R}$ à déterminer. On sait que le triangle $OA_{n+1}A_{n+2}$ est un triangle rectangle isocèle en A_{n+2}. On peut alors utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OA_{n+1}^2 = OA_{n+2}^2 + A_{n+1}A_{n+2}^2 \Leftrightarrow d_n^2 = 2A_0A_{n+2}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d_n^2}{2} = d_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{d_n}{\sqrt{2}} = d_{n+1} \Leftrightarrow d_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}d_n. \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tel que $d_{n+1} = qd_n$. On peut donc conclure que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $d_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Comme $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $d_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, on peut exprimer d_n en fonction de n :

$$d_n = \sqrt{8} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

On veut calculer :

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} A_kA_{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} d_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

On peut factoriser par $2\sqrt{2}$, on obtient :

$$L = 2\sqrt{2}\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\right)$$

Ensuite, on remarque que $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ est une somme de termes en progression géométrique et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0$ car $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Ainsi,

$$L = 2\sqrt{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 4\sqrt{2}+4.$$

La longueur de la spirale est de $4\sqrt{2} + 4$.

□

1.2 Suites et probabilités

1. On lance n fois un dé équilibré. Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6.
2. Déterminer le nombre minimal de lancers pour qu'on ait $p_n \geq 0,99$.

$\Diamond$ *Solutions.* 1. Soit X_n le nombre de fois que l'on obtienne un 6 lors de n lancers d'un dé équilibré ($n \in \mathbb{N}^*$). Les expériences sont répétés identiquement et sont indépendants les unes aux autres. Ainsi, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$ (proba d'obtenir un 6). On veut calculer la probabilité de l'événement « $X_n \geq 1$ ». Pour cela, on utilise la probabilité de l'événement contraire « $X_n < 1$ ».

$$p_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n < 1).$$

Or, les valeurs possibles de X_n appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. Ainsi, $X_n < 1$ équivaut à l'événement $X_n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} p_n &= P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n < 1) = 1 - P(X_n = 0) \\ &= 1 - \left(\binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

2. On veut déterminer le nombre minimal de lancers pour qu'on ait $p_n \geq 0,99$. Pour cela, on résout l'inéquation $p_n \geq 0,99$.

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0,01 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,01). \end{aligned}$$

Ici, on doit changer le sens du signe de l'inéquation car $\frac{5}{6} < 1$ et $\ln(\frac{5}{6}) < 0$.

$$p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(\frac{5}{6})} \Leftrightarrow n \geq 25,26.$$

Conclusion : À partir du 26e lancer de dés, la probabilité d'obtenir au moins un 6 est supérieure à $0,99$.

□

1.3 Suites et nombres

Exercice 1.2. On considère le nombre infini :

$$M = 123456789101112\ldots$$

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le n^e terme de la suite est constitué des n premiers chiffres de la partie décimale (en partant de la gauche) de M. Ainsi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 12 \\ u_3 = 123 \end{cases}$$

1. Déterminer u_{2017}.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$u_n = 123456789101112\ldots20162017$$

◊ *Solutions.* 1. On va dénombrer les nombres comportant 1, 2, 3, 4, 5 chiffres.

1 chiffre Il y a 9 nombres à 1 chiffre (on ne compte pas 0).

2 chiffres Il y a 90 nombres à 2 chiffres (de 10 à 99).

3 chiffres Il y a 900 nombres à 3 chiffres (de 100 à 999).

4 chiffres Il y a 9000 nombres à 4 chiffres (de 1000 à 9999).

5 chiffres Il y a 90000 nombres de 5 chiffres (de 10000 à 99999).

On va compter le nombre de chiffres qu'il y a dans les nombres cités.

1 chiffre Il y a 9 chiffres dans l'écriture des 9 nombres à 1 chiffre.

2 chiffres Il y a $2 \times 90 = 180$ chiffres dans l'écriture des 90 nombres à 2 chiffres.

3 chiffres Il y a $3 \times 900 = 2700$ chiffres dans l'écrtiure des 900 nombres à 3 chiffres.

On peut s'arrêter là pour cette question car $2700 + 180 + 9 = 2889$ chiffres dans les nombres de 1, 2 et 3 chiffres et $2889 > 2017$.

Quel est donc le 2017ᵉ chiffre de l'écriture décimale de M (en partant vers la gauche) ? On peut calculer $2017 - 189 = 1828$ chiffres pour des nombres à 3 chiffres. On peut alors diviser par 3 :

$$\frac{1828}{3} \approx 609,3$$

Ainsi, on arrive à $609 + 100 - 1 = 708$ + 1 chiffre qui sera le 7 de 709. D'où :

$$u_{2017} = 123456789101112\ldots7087.$$

Le programme suivant donne u_N sous forme de liste.

```
 fonction unnombre(N)
  local M,L,n,k,s;
    M := []
     n := 0;
    tantque nops(M) < N faire
      n := n+1;
      k := n;
      L := NULL;
        tantque k >= 1 faire
    L := [op(L),k-floor(k/10)*10]
    k := floor(k/10)
  ftantque
    M := [op(M),op(revlist(L))]
  ftantque
   tantque nops(M) <> N faire
     M := suppress(M,nops(M)-1)
   ftantque
  retourne(M);
ffonction
```

et ainsi :

```
unnombre(2017);
[1,2,3,4,5,6,7,8,...,7,0,5,7,0,6,7,0,7,7,0,8,7]
```

2. Avant de déterminer le rang n tel que $u_n = 123456789101112\ldots20162017$, il faut remarquer que le nombre $\ldots20162017$ peut se produire avec 2016 et 2017 et non avant. Pourquoi cela ? Car 20, 16, 17 ne se suivent pas donc ça ne peut pas être une composition de nombres avec 2 chiffres, de même pour 3 chiffres, 201 ne suit pas 620.

Il suffit donc de compter le nombre de chiffres qu'il y a dans les nombres entre 1 et 2017. On a déjà fait pour les nombres de 1 à 3 chiffres, on en a décompté $9 + 180 + 2700 = 2889$. Combien y-a-t-il de chiffres dans les nombres entre 1000 et 2017 :

$$(2017 - 1000 + 1) \times 4 = 1018 \times 4 = 4072.$$

Ainsi :

$$u_{2889+4072} = u_{6961} = 123456789101112\ldots 20162017.$$

On peut vérifier sur Xcas :

```
  fonction invunnombre(N)
  local M,L,n,k,s;
    M := []
     n := 0;
    tantque n<>N faire
      n := n+1;
      k := n;
      L := NULL;
        tantque k >= 1 faire
    L := [op(L),k-floor(k/10)*10]
    k := floor(k/10)
  ftantque
    M := [op(M),op(revlist(L))]
  ftantque
  retourne(nops(M));
ffonction:;
```

et cela donne :

```
invunnombre(2017)
6961
```

□

2 Problèmes conduisant à une modélisation par des fonctions

2.1 Optimisation d'enclos

Exercice 2.1. On souhaite délimiter un enclos rectangulaire adossé à un mur à l'aide d'une clôture en grillage de 80 mètres de long.

Quelles sont les dimensions de l'enclos pour obtenir la plus grande surface possible ?

◊ *Solutions.* Soit L la longueur de l'enclos et ℓ sa largeur. La longueur du grillage est donné par : $L_g = 2 \times \ell + L = 80$. On peut exprimer L en fonction de ℓ : $L = 80 - 2\ell$. On a alors à maximiser la fonction suivante :

$$A(\ell) = (80 - 2\ell)\ell = 80\ell - 2\ell^2$$

On peut ainsi calculer la dérivée de la fonction A.

$$A'(\ell) = -4\ell + 80.$$

Comme $a = -2 < 0$, la fonction A admet un maximum en x tel que $A'(x) = 0$. D'où :

$$A'(\ell) = 0 \Leftrightarrow -4\ell + 80 = 0 \Leftrightarrow 4\ell = 80 \Leftrightarrow \ell = \frac{80}{4} = 20.$$

Il nous reste plus qu'à déterminer $L = (80 - 2\ell) = (80 - 2 \times 20) = 40$. Ainsi, l'enclos d'aire maximal a pour dimensions $40 \times 20 = 800$ m². □

2.2 Utilisation des fonctions économiques

Exercice 2.2. **Partie A** Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20\,,40]$. Donner, en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on prendra 1 cm pour 5 unités en abscisse et 1 cm pour 20 unités en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout x de $]0\,,+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
où g est la fonction définie dans la partie A.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
5. Construire $\mathcal{C}$ et D sur le même graphique.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera des valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est définie sur $]0\,,100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

$C(x)$ étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc défini par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égale à 13000 €. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

$\Diamond$ *Solution.* **Partie A** g est définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1200x - 100.$$

1. La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,,+\infty[$:

$$g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x-20)(x+20)$$

$3x^2-1200$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -20 et 20. On peut donner son signe en utilisant la règle du signe du trinôme. On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0\,,20]$ et strictement croissante sur $[20\,,+\infty[$. On peut alors donner le tableau de variations de g :

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-100	$\searrow$	$g(20)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$g(0) = -100 \quad \text{et} \quad g(20) = 8000 - 24000 - 100 = -16100.$$

2. On a :

$$g(20) = -16100 \quad \text{et} \quad g(40) = 15900.$$

g est continue et strictement croissante sur $[20\,,40]$ et prend ses valeurs dans $[-16100\,,15900]$. Comme $0 \in [-16100\,,15900]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α dans $[20\,,40]$.
En utilisant une calculatrice, on peut remarquer :

$$g(34) = -1596 \quad \text{et} \quad g(35) = 775.$$

g est strictement croissante sur $[20\,,40]$: $g(34) < 0$ et $g(35) > 0$ donc $34 < \alpha < 35$. α a pour valeur approchée 34 à l'unité près.

3. Sur l'intervalle $[0\,,20]$, g est strictement décroissante et $g(0) = -100$ donc $g(0) < 0$. On en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x \in [0\,,20]$. Sur l'intervalle $[20\,,+\infty[$, g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$. Donc si $20 \leq x < \alpha$, on a $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$. Donc $g(x) < 0$ pour $x \in [0\,,\alpha[$, $g(x) = 0$ pour $x = \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x \in]\alpha\,,+\infty[$.

Partie B f est définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

1. $\lim_{x\to0^+} 1200x + 50 = 50$ et $\lim_{x\to0^+} x^2 = 0$ par valeurs supérieures ($x^2 > 0$). Donc :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1200x+50}{x^2} = +\infty.$$

D'autre part, $\lim_{x\to0^+} x + 50 = 50$, donc

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty.$$

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1200x+50}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1200x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1200}{x} = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} x + 50 = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. f est une fraction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition. $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1200 \times (x^2) - (1200x + 50)(2x)}{(x^2)^2} \\ &= 1 + \frac{x(1200x - 2400x - 100)}{x^4} = 1 + \frac{-1200x - 100}{x^3} \end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. En utilisant les résultats de la partie A, on obtient le signe de $f'(x)$ et on peut donner le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

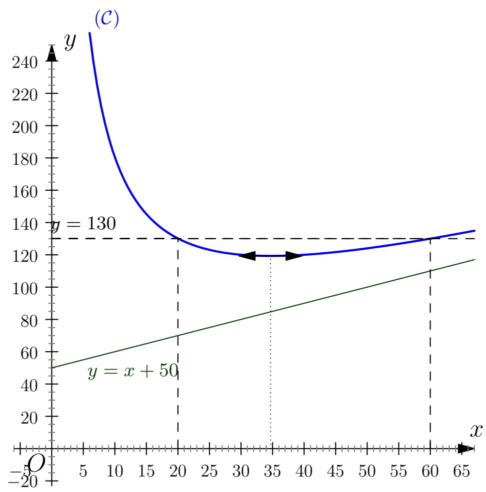
On sait que $\alpha = 34$ donc $f(\alpha) \approx f(34) \approx 119$.

4. On a $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$ et on a vu que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0.$$

On en déduit que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$.

5.



Les solutions de l'équation $f(x) = 130$ sont les abscisses des points de la droite d'équation $y = 130$ et de la courbe $\mathcal{C}$. On observe graphiquement que l'équation $f(x) = 130$ a deux solutions qui sont environ 20 et 60.

Partie C 1. Pour $x \in]0\,,100[$, on a :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

et

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3+50x^2+1200x+50}{x^2} = x+50+\frac{1200x+50}{x^2} = f(x).$$

D'après les variations de la fonction f obtenues dans la partie B, le coût moyen minimum est obtenu pour α centaines objets. Sachant que $\alpha = 34$, on en déduit que, pour avoir un coût moyen minimum, il faut fabriquer environ 3400 objets.

2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est 13000 €, c'est-à-dire 130 centaines d'euros. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que le coût moyen de chaque centaine d'objets soit inférieur à 130 centaines d'euros, c'est-à-dire $C_M(x) \leq 130$ ou encore $f(x) \leq 130$. D'après le graphique de la partie B, $f(x) \leq 130$, pour $x \in [20\,,60]$. Les quantités étant exprimées en centaines d'objets, on en déduit que l'entreprise est rentable lorsqu'elle fabrique au maximum 2000 objets et au maximum 6000 objets.

□

2.3 Tarifs pour les photocopieuses

Dossier CAPES session 2018 - Troisième Concours

Dans un magasin de reprographie, il existe deux types de photocopieurs.

Le prix des photocopies effectuées en utilisant le *photocopieur de type A* est obtenu à l'aide de la fonction `prixtotal` programmée ci-contre en langage Python.

```
def prixtotal(n):
    if n<=50:
        prix=n*0.1
    if 50<n and n<=200:
        prix=5+(n-50)*0.05
    if n>200:
        prix=12.5+(n-200)*0.02
    return prix
```

Le *photocopieur de type B* fonctionne à l'aide d'une carte vendue 15 €. Cette carte permet d'effectuer 200 photocopies puis à partir de la 201[e], la photocopie est facturée $0,01$ €.

Déterminer en fonction du nombre de photocopies réalisées, le type de photocopieur à utiliser.

◇ *Solutions.* Soit x le nobmre de photocopies effectuées. On note $A(x)$ le prix de x photocopies effectuées en utilisant la photocopieuse de type A. On a alors :

$$A(x) = \begin{cases} 0,1x & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 5+(x-50)\times 0,05 & \text{si } 50 \leq x \leq 200 \\ 12,5+(x-200)\times 0,02 & \text{si } x \geq 200 \end{cases}$$

On note $B(x)$ le prix de x photocopies effectuées en utilisant la photocopieuse de type B.

$$B(x) = \begin{cases} 15 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ 15+(x-200)\times 0,01 & \text{si } x \geq 200 \end{cases}$$

On peut d'ors et déjà donner un intervalle d'étude pertinant pour la résolution de l'inéquation $A(x) \leq B(x)$. En effet, pour $0 \leq x \leq 200$, $B(x) = 15$ et $A(x) \leq 15$. Donc on résout l'inéquation proposée pour $x \geq 200$. Dans ces conditions : $A(x) = 12,5+(x-200)\times 0,02$ et $B(x) = 15+(x-200)\times 0,01$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} A(x) \leq B(x) &\Leftrightarrow 12,5+(x-200)\times 0,02 \leq 15+(x-200)\times 0,01 \\ &\Leftrightarrow (x-200)\times 0,02-(x-200)\times 0,01 \leq 15-12,5 \\ &\Leftrightarrow 0,01(x-200) \leq 2,5 \Leftrightarrow x-200 \leq 250 \Leftrightarrow x \leq 450. \end{aligned}$$

À partir de 450 photocopies, le tarif de la photocopieuse de type B est plus avantageux que la photocopieuse de type A. $\square$