LEÇON N° 37

Exemples de cacluls d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées)

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES

Prérequis

Intégrales, accroissements finis, primitives, propriétés sur l'intégrale, trigonométrie, fonction polynôme, fonction exponentielle

Références

— G. COSTANTINI, *Calcul intégral*. Cours de Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`.
— *Leçon 84 : Calcul approché d'intégrales*. Université Claude Bernard-Lyon I. CAPES de Mathématiques : Oral. URL : `http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/integrales.pdf`. Année 2004-2005.
— M. LEZEN, *Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou deux exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice*. URL : `http://capes-de-maths.com`. 2011.
— F. THIRIOUX, *BTS Electrotechnique Cours de Mathématiques*. Lycée René Perrin, Ugine.
— C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*. Contrôle Continue Ellipses.

Table des matières

1 Sommes de Riemann

Soit f une application continue définie sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\sigma = (a_i)_{1\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ (c'est-à-dire $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$), h est le pas de la subdivision σ ($h = \max(a_{i+1} - a_i)$) et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Définition 1.1 (Somme de Riemann). On appelle *somme de Riemann* associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0\leq i\leq n})$ le réel :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i).$$

Théorème 1.2.

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. ◊ Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_{i+1} - a_i)f(\xi_i)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i))\right).\end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)|\,\mathrm{d}x\right).$$

Or, du théorème de Heine appliqué à f continue sur le segment $[a,b]$, on déduit f uniformément continue sur $[a,b]$ (et donc aussi sur chaque $[a_{i+1}, a_i]$, c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{E} \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Pour une subdivision σ de pas h tel que $0 < h < \eta$, on aura :

$$\forall x \in [a_i, a_{i+1}],\quad |x - \xi_i| \leq a_{i+1} - a_i \leq h < \eta.$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varepsilon\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon(a_{i+1} - a_i) = \varepsilon(b-a).$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Toute intégrale est donc une limite de somme de Riemann. □

Remarque 1.3. Le résultat ci-dessus reste valable si f est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à f.

Proposition 1.4 (Cas particulier d'une subdivision régulière). Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on particularise $a_i=a+i\frac{b-a}{n}$ et $\xi_i=a_i$ (donc $h=\frac{b-a}{n}$). On a alors :

$$a_{i+1}-a_i=\frac{b-a}{n}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1.5 (Cas particulier des fonctions définies sur $[0\,,1]$). La formule ci-dessous devient alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 1.6. On veut étudier la limite de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}.$$

On considère l'application f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{1+x}$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\ln 2.$$

2 Intégration par primitives

Théorème 2.1 (Théorème fondamental du calcul intégral). Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0\in I$. La fonction F définie sur I par :

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. Autrement dit : $F(x_0)=0$, F est dérivable sur I et pour tout réel $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Démonstration. ◊ Soit $x_0\in I$. Nous allons montrer que l'accroissement moyen $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ admet une limite lorsque x tend vers x_i et que cette limite est précisément $f(x_1)$. Évaluons :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_i)}{x-x_1}-f(x_1)\right|=\frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x_1}f(t)\,\mathrm{d}t-(x-x_1)f(x_1)\right|.$$

En utilisant la relation de Chasles et la formule d'intégration pour une fonction constante, on peut écrire :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Mais d'après la propriété de compatibilité avec l'addition :

$$\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x} (f(t)-f(x_1))\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| \leq \frac{1}{|x-x_1|}\int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|\,\mathrm{d}t.$$

Or, f est continue en x_1 donc admet une limite finie en x_1. Cela signifie que tout intervalle ouvert $f(x_1)$ contient toutes les valeurs de $f(t)$ pour t assez proche de x_1.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $I]f(x_1)-\varepsilon\,,f(x_1)+\varepsilon[$. Alors, il existe un réel η tel que pour tout $t \in\,]x_1-\eta\,,x_1+\eta[$, on ait :

$$f(t)\in\,]f(x_1)-\varepsilon\,,f(x_1)+\varepsilon[.$$

D'où :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| \leq \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi aussi petit que voulu, on a bien :

$$\lim_{x\to x_1}\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}=f(x_1).$$

Donc F est dérivable en x_1, et $F(x_1)=f(x_1)$. Et comme ce raisonnement est valable pour tout $x_1\in I$, F est bien une primitive de f sur I. □

Ce théorème admet deux corollaires fondamentaux suivants :

Corollaire 2.2 (Existence de primitives pour les fonctions continues). Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Corollaire 2.3 (Formule de Newton-Leibniz). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

Démonstration. ◊ Soit $x_0\in I$ et G la primitive de f définie par :

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout :

$$F(x)=G(x)+k.$$

On a alors :

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 2.4. La quantité $F(b)-F(a)$ se note souvent $[F(t)]_a^b$.

Exemples 2.5. 1.
$$\int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

2.
$$\int_0^1 x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3.
$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}t = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{1/x}{\ln x} \,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{\mathrm{e}} = -\ln(\ln(2)).$$

Remarque 2.6. Le choix de la primitive F choisie n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

THÉORÈME 2.7 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I. S'il existe un réel M tel que $|f'| \leq M$ sur I alors : pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.

Démonstration. ◊ Pour $a < b$, on a :
$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leq M(b-a) \leq M\,|b-a|\,.$$
Pour $a > b$, ona :
$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_b^a f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_b^a \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leq M(a-b) \leq M\,|b-a|\,.$$
□

3 Intégration par parties

Définition 3.1 (Classe $\mathcal{C}^1$). On dit qu'une fonction est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

THÉORÈME 3.2. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, alors :
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

◊ *Démonstration du théorème 3.2.* On sait que pour tout $t \in [a\,,b]$:
$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$
En intégrant de a à b :
$$\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$
et d'après la linéarité de l'intégrale :
$$\int_a^b (u(t)v(t)')\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
D'où le théorème. □

Méthode 3.3. Pour intégrer par parties, il faut
- reconnaître, dans la fonction à intégrer, le produit d'une fonction u et d'une fonction dérivée v' ;
- appliquer la formule d'intégration par parties.

Exemples 3.4.

1. Soit à calculer :
$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$ (à une constante près) et ainsi :
$$I = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

2. Soit à calculer :
$$J(x) = \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ (à une constante près) et ainsi :
$$J(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1.$$

4 Intégration par changement de variables

THÉORÈME 4.1. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}$. Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

La démonstration est hors programme du BTS et admise.

Remarque 4.2. Dans $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$, on pose $u = \varphi(t)$ (changement de variable qu'on donne ou qu'on doit trouver). Si t vaut a (resp. b) alors u vaut $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale. Ensuite $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS), $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, que l'on remplace dans l'intégrale.

◊ *Démonstration (hors programme).* Posons $H(x) = \int_\alpha^x f(u)\,\mathrm{d}u$ où α et x sont deux éléments de I. La fonction f est continue sur I, donc la fonction H est dérivable sur I, on a $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On a :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\alpha} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\alpha}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{\alpha}^{\varphi(a)} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\alpha}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$
soit :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = -H(\varphi(a)) + H(\varphi(b)) = -(H \circ \varphi)(a) + (H \circ \varphi)(b).$$
Posons $K = H \circ g$, nous obtenons :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = K(b) - K(a).$$

Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et puisque H est dérivable sur I, la fonction composée K est dérivable sur $[a\,,b]$ et on a :
$$K'(t) = H'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Par conséquent, la fonction K est une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $(f\circ\varphi)\varphi'$.

De plus, les fonctions φ et φ' sont continues sur $[a,b]$ et la fonction f étant continue sur I alors la fonction K' est continue sur $[a,b]$ et on a :

$$K(b)-K(a)=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

soit encore :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b f(\varphi'(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemples 4.3. 1. Soit à calculer

$$I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

On met t^2+t+1 sous la forme canonique :

$$t^2+t+1=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

Ainsi

$$I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}=\int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u,$$

en posant $u=\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$

$$U=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Soit f une fonction T-périodique. Alors l'intégrale de f sur une période est constante ; par exemple :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles

$$=\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-T/2}^0 f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

en posant $u=t-T$

$$=\int_{-T/2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $f(u+T)=f(u)$

$$=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.4 (Intégrale de Wallis).. Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t,\ J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t,\ K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t,\ L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, \mathrm{d}t.$$

$\Diamond$

1. On va calculer I_n grâce à une intégration par parties. On a immédiatement :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, \mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a, par intégration par parties $[u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t]$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t \, \mathrm{d}t = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t \right]_0^t + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\sin t)^2 \, \mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

ou encore

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

On en déduit immédiatement :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4},\ I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3},\ I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Ainsi, on peut en déduire une formule générale :
— Si n pair $(n = 2p)$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{\binom{2p}{p}\pi}{2^{2p+1}}.$$

— Si n impair $(n = 2p+1)$:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On calcule J_n en se ramenant à I_n. En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \right)^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n \, \mathrm{d}u = I_n.$$

3. On calcule K_n en se ramenant à I_{2n+1}. On pose $u = \arcsin t$ ($t \mapsto \arcsin t$ est une bijection de $[-1\,,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^{2n} \cos u \, \mathrm{d}u = 2 I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. On calcule L_n en se ramenant à K_n.

$$L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, \mathrm{d}t = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5 Intégration de fractions rationnelles

Exercice 5.1. 1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. (a) En déduire sur $]1\,,+\infty[$ une primitive F_1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.$$

(b) Déterminer une primitive F_2 de f sur l'intervalle $]-1\,,1[$ puis une primitive F_3 sur l'intervalle $]-\infty\,,1[$.

3. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_{-4}^{-2} \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

puis la valeur décimale approchée de 1 à 10^{-2} près par défaut.

$\Diamond$ *Correction de l'exercice.* 1.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} &= \frac{a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \\
&= \frac{a(x^2+2x+1) + b(x^2-1) + cx - c}{(x-1)(x+1)^2} \\
&= \frac{(a+b)x^2 + (2a+c)x + a - b - c}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la comparaison des coefficients respectifs donne :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+c=0 \\ a-b-c=-4 \end{cases}$$

On exprime, à l'aide des deux premières équations, b et c en fonction de a et l'on reporte les expressions trouvées dans la troisième équation $b = 2-a$ et $c = -2a$:

$$a - (2-a) - (-2a) = -4 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

On en tire $b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $c = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi,

$$a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = 1.$$

2. (a) On peut écrire, en utilisant les résultats de la première question :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$, $x-1>0$ et $x+1>0$. On en reconnaît dans les deux premiers quotients la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$. Le troisième quotient est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Une primitive F_1 de f sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$ est :

$$F_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Dans le cas général $x \mapsto \ln|u|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$.

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.$$

Si $u < 0$, $\ln|u| = \ln(-u)$, on applique cette règle pour le calcul des primitives F de f : sur l'intervalle $]-1\,,1[$, $x-1<0$ et $x+1>0$:

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

sur l'intervalle $]-\infty\,,-1[$, $x-1<0$ et $x+1<0$:

$$F_3(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(-x-1) - \frac{1}{x-1}.$$

3. L'intervalle $[-4\,,-2]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty\,,1[$. On utilise, pour primitive de f, la fonction F_3.

$$\begin{aligned} I = F_3(-2) + F_3(-4) &= \left(-\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{-3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln 3 + 1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 5 - 3\ln 3 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $I \approx -1{,}824451$, ce qui signifie $-1{,}83 \leq I \leq -1{,}82$. La valeur décimale approchée par défaut de I à 10^{-2} près est : $I \approx -1{,}83$.

□

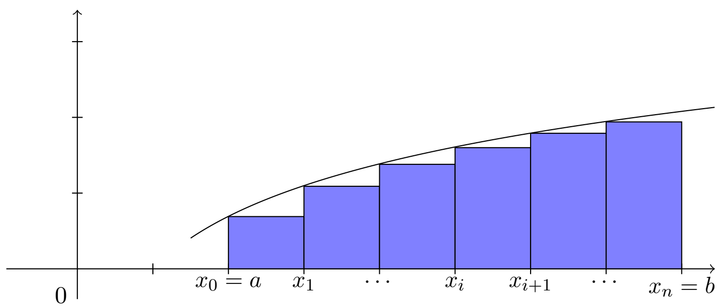
6 Calcul approché de l'intégrale

Dans cette section, on ne travaillera qu'avec des fonctions monotones (croissantes). Si la fonction n'est pas monotone, il suffit de subdiviser l'intervalle I.

6.1 Méthode des rectangles à gauche

On subdivise $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit R_k l'aire de $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$. Soit :

$$AR_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$



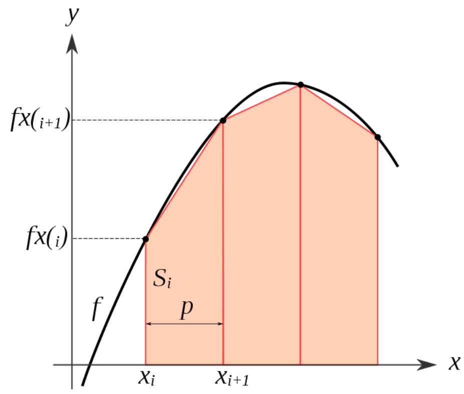
Remarques 6.1. 1. Si f est croissante, c'est une approximation par défaut et si f est décroissante, c'est une approximation par excès.

2. La méthode des rectangles à gauche fait penser aux sommes de Riemann vue en début de leçon.

6.2 Méthode des trapèzes

On construit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit T_k l'aire du trapèze $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ et

$$AT_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).\right)$$



Remarque 6.2. Plus rapide en termes de convergence par rapport à n mais on ne peut pas savoir si c'est une approximation par excès ou par défaut.

7 Autres calculs de primitives

Exemple 7.1. On veut calculer :

$$F = \int (t^2 + 2t)e^{\lambda t}\,dt$$

où λ est un nombre réel non nul.

Puisque la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est une fonction polynôme, cherchons F sous la forme $F(x) = P(x)\exp(\lambda x)$, où P est une fonction polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. On doit avoir quel que soit x :

$$F'(x) = (P'(x) + \lambda P(x))\exp(\lambda x) = (x^2 + 2x)\exp(\lambda x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x^2 = 2x = P'(x) + \lambda P(x) &= (2ax + b) + \lambda(ax^2 + bx + c) \\ &= \lambda a x^2 + (2a + \lambda b)x + b + \lambda c. \end{aligned}$$

Les coefficients a, b et c sont solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \lambda a = 1 \\ 2a + \lambda b = 2 \\ b + \lambda c = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ b = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} \\ c = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^3} \end{cases}.$$

Il vient donc

$$F(x) = \left[\frac{1}{\lambda}x^2 + 2\frac{\lambda-1}{\lambda^2}x + 2\frac{1-\lambda}{\lambda^3}\right]\exp(\lambda x).$$

Exemple 7.2. On veut calculer

$$\int (\sin t)^4 \, \mathrm{d}t.$$

Nous avons l'identité :

$$8(\sin x)^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$$

Il vient donc :

$$\int (\sin t)^4 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \cos(4t) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \cos 2t \, \mathrm{d}t + \frac{3}{8}\int \mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.$$