LEÇON N$^{\mathrm{O}}$ 36

Intégrales, primitives.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES

Prérequis

Fonctions dérivées, étude de fonctions, fonctions exponentielles et logarithmes.

Références

— G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S*. Bordas, Programme 2001.

Table des matières

1 Primitives d'une fonction

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 (Primitive d'une fonction). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I, une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout x appartient à I, $F'(x) = f(x)$.

Exemples 1.2.
1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3$ puisque $F'(x) = f(x)$.
2. $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0\,,+\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque sur $F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 1.3. Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple 1.4. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), donc elle admet des primitives.

PROPRIÉTÉ 1.5. Soit F une primitive de f sur un intervalle I.
- Pour tout nombre k, $x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.
- Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

◊ *Démonstration de la propriété 1.5.*
- Soit k un réel et H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + k$. H est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables et, pour tout x de I,
$$H'(x) = F'(x).$$
Puisque F est une primitive de f, on a : $F'(x) = f(x)$ donc $H'(x) = f(x)$: H est une primitive de f sur I.
- Soit G une primitive de f sur I. La fonction $G - F$ est dérivable et
$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$$
puisque, pour tout x de I,
$$G'(x) = f(x) = F'(x).$$
Donc $G - F$ est une fonction constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) - F(x) = k$.

□

Exemple 1.6. La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est une primitive de $f : x \mapsto 2\sin x \cos x$.
Les fonctions $x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{2}$, $x \mapsto \sin^2 x - 1$, $x \mapsto -\cos^2 x$… sont aussi des primitives de f.

PROPRIÉTÉ 1.7. Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant donnés (appelés « conditions initiales »), il existe une *unique primitive* F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

◊ *Démonstration de la propriété 1.7.* f admet des primitives sur I qui s'écrivent sous la forme $x \mapsto G(x) + k$ où G est l'une de ces primitives. La condition $F(x_0) = y_0$ conduit à $G(x_0) + k = y_0$. D'où
$$k = y_0 - G(x_0) \quad \text{et} \quad F : x \mapsto G(x) + y_0 - G(x_0).$$
F est l'unique primitive de f sur I vérifiant la condition. □

Pour une représentation graphique des primitives :

— les courbes de primitives de la fonction f sur I se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur $\vec{v}(0, k)$.

— Pour tout point $A(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in I$ (situé dans la bande), il existe une primitive unique dont la courbe représentative passa par A.

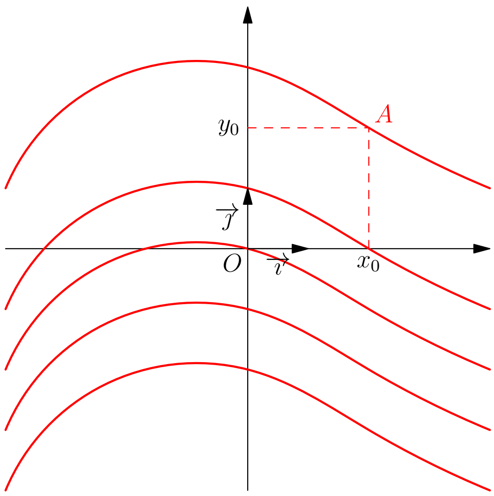


FIGURE 1 – Représentation de primitives d'une fonction

1.2 Tableaux de primitives et opérations sur les primitives

Les résultats du tableau 1 s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c = constante)	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n = -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0\,; \\ ]-\infty\,, 0[\text{ ou }]0\,, +\infty[& \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\,, 0[$ ou $]0\,, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi\,, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0\,, +\infty[$

TABLE 1 – Tableau des primitives usuelles

On considère dans le tableau 2 des fonctions u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\begin{cases} \ln u \\ \ln(-u) \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } u > 0 \text{ sur } I \\ \text{si } u < 0 \text{ sur } I \end{cases}$
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

TABLE 2 – Opérations sur les primitives

2 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 2.1 (Aire sous la courbe). Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. *L'aire sous la courbe* $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,, b]$ est l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit *l'intégrale* (ou somme) de a à b de f.

Remarques 2.2.

1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

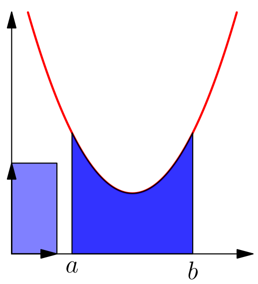
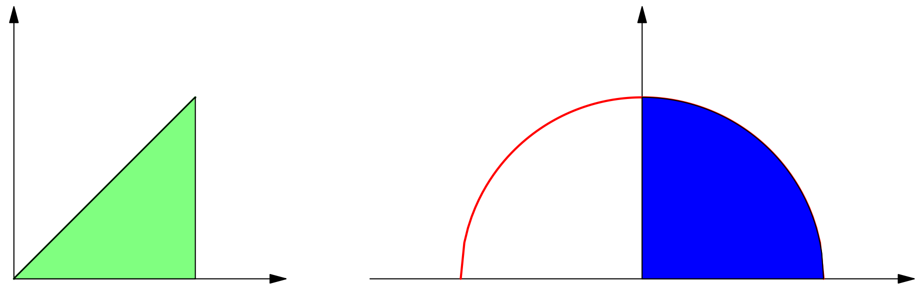


FIGURE 2 – Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

Exemples 2.3.

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,, 1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



(a) $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

FIGURE 3 – Figure pour l'exemple

PROPRIÉTÉ 2.4. Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ diminue.

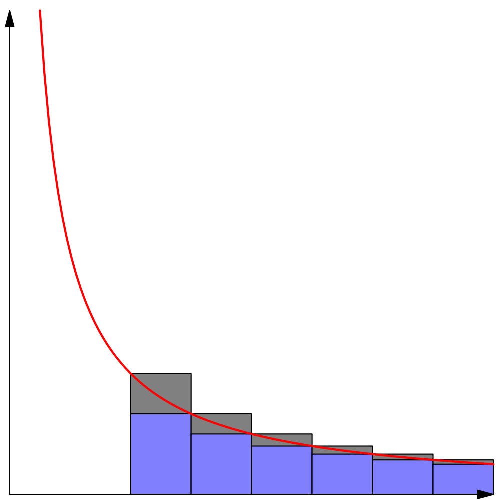


FIGURE 4 – Représentation des suites u_n et v_n

Remarques 2.5.

1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

PROPRIÉTÉ 2.6 (RELATION DE CHASLES, POUR LES AIRES). Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a\,,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a\,,c]$ et $[c\,,b]$.

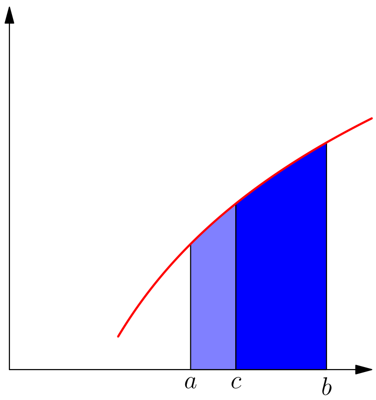


FIGURE 5 – Relation de Chasles

Exemple 2.7. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 6. Alors :

$$\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

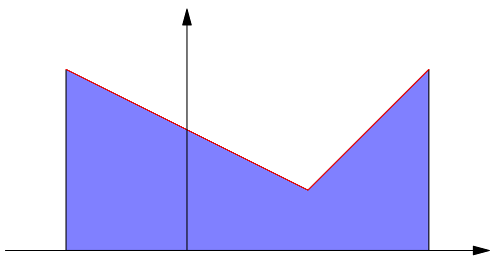


FIGURE 6 – Représentation graphique de f pour l'exemple

Définition 2.8 (Valeur moyenne). Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

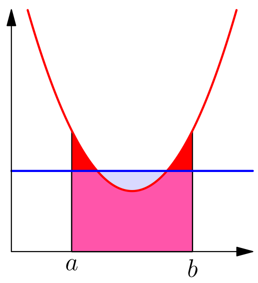


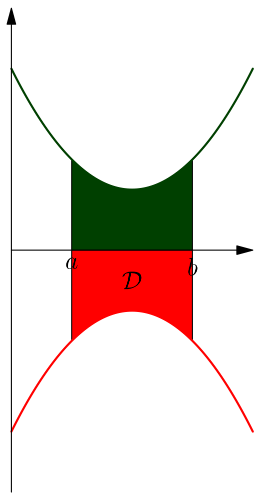
FIGURE 7 – Valeur moyenne

Définition 2.9. Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à *l'opposé* de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

PROPRIÉTÉ 2.10. Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration de la propriété 2.10. $\mathcal{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 2.9, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



$\square$

PROPRIÉTÉ 2.11. Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à :

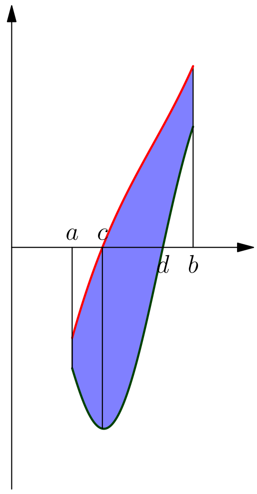
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.12. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$ est $-\frac{1}{3}$.

PROPRIÉTÉ 2.13. Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 2.13.* On découpe l'intervalle $[a\,, b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signes ou de signe contraire.



Ainsi, dans la figure ci-dessus, l'aire entre les deux courbes est :

— sur l'intervalle $[a\,, c]$:

$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

— sur l'intervalle $[c\,, d]$:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

— sur l'intervalle $[d\,, b]$:

$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

pour la valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. $\square$

3 Intégrale et primitive

PROPRIÉTÉ 3.1. Soit une fonction f continue, positive sur l'intervalle $[a\,, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur l'intervalle $[a\,, b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unité d'aire à $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,, b]$.

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 3.1.* La démonstration est faite dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a\,, b]$. On admettra le résultat dans le cas général. Pour tout x tel que $a \leq x \leq b$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,, b]$. Pour $h > 0$:

$$hf(x) \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq hf(x+h)$$

soit

$$f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h).$$

Pour $h < 0$:

$$(-h)f(x+h) \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq (-h)f(x).$$

soit

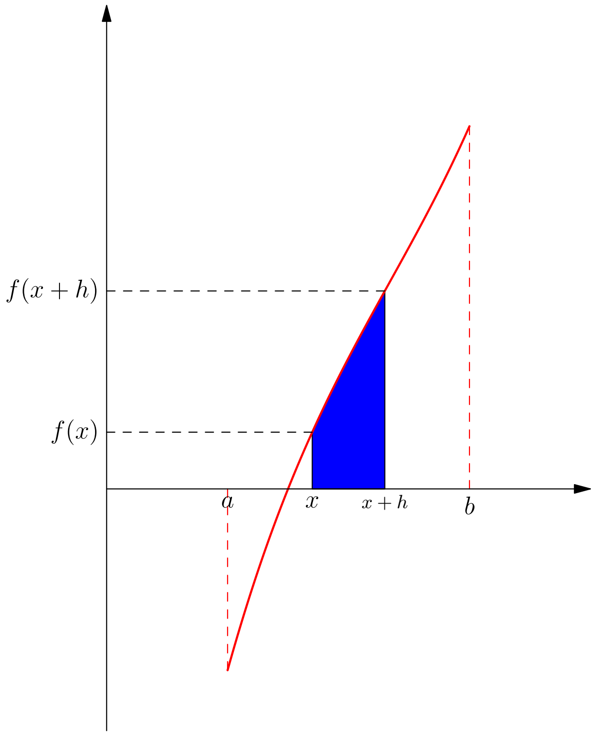
$$f(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x).$$

La fonction $\mathcal{A}$ est donc dérivable pour tout x de l'intervalle $[a\,,b]$ et sa dérivée est la fonction f. De plus, $\mathcal{A}(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{A}$ est la primitive de f nulle en a. Soit F une primitive quelconque de f, on peut donc écrire $\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a)$. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ vérifie donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$



$\square$

Remarques 3.2. 1. On utilise la notation :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. On a les égalités :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples 3.3. 1. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2+1$, sur l'intervalle $[-1\,,2]$ est :

$$\int_{-1}^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6.$$

2. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est :

$$\int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

3. L'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,,2]$ est :

$$-\int_1^2 -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Définition 3.4. Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. Pour tout x appartenant à I, la fonction définie par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est *l'unique primitive* de f sur I s'annulant en a. Si F est une primitive quelconque de f sur I, alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Remarque 3.5. Si $x > a$ et f positive sur l'intervalle $[a\,,x]$, alors $F(x)$ peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,x]$, exprimée en unité d'aire. Quels que soient a et b, éléments de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemples 3.6. 1. Sur $\mathbb{R}$,

$$\int_a^x 1\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{d}t = [t]_a^x = x - a.$$

2. Sur $\mathbb{R}$,

$$\int_0^x -t^2\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3.$$

3. Sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln x]_1^x = \ln x.$$

4. Sur $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - 1.$$

4 Propriétés algébriques de l'intégrale

PROPRIÉTÉ 4.1 (RELATION DE CHASLES). Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Quels que soient a, b et c éléments de I :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 4.2. Cette propriété prolonge la propriété 3.1, qui a été établie dans le cas où les intégrales correspondent à des aires.

Exemple 4.3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (|2-t| + |1-t|)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3-2t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (2t-3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[3t - t^2\right]_0^1 + [t]_1^2 + \left[t^2 - 3t\right]_2^3 = 2 + 1 + 2 = 5.\end{aligned}$$

Propriété 4.4 (Linéarité de l'intégrale). Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, et α et β deux nombres réels. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 4.5.

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = [\tan u]_0^{\pi/4} - [u]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

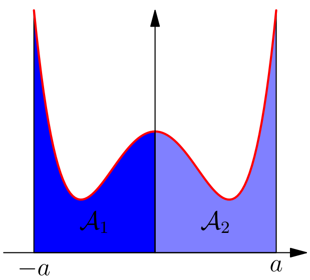
Propriété 4.6 (Fonctions paires et impaires). Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Pour tout élément a de I :
- si f est paire : $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;
- si f est impaire : $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

L'interprétation graphique est la suivante :
- Si f est paire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

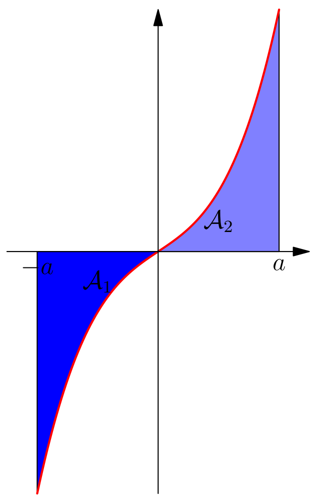
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{A}_2 = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

- Si f est impaire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0.$$



(a) f paire



(b) f impaire

Figure 8 – Intégrale de fonctions paires et impaires

PROPRIÉTÉ 4.7 (FONCTIONS PÉRIODIQUES). Soit f une continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Pour tout nombre réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Si f est positive, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,a+T]$. Par translations des domaines correspondants, on retrouve l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0\,,T]$.

— Si f est négative, on retrouve le résultat en considérant la fonction $-f$.

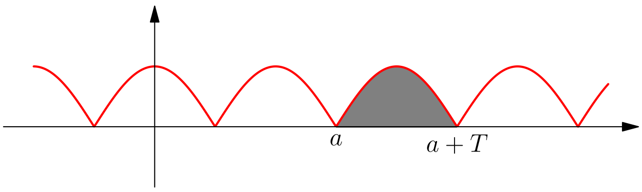


FIGURE 9 – Intégrales d'une fonction périodique

5 Intégrale et inégalités

PROPRIÉTÉ 5.1. Soit une fonction f continue positive sur un intervalle $[a\,,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Remarques 5.2.

1. Ce résultat est immédiat, puisque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, par définition, l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,b]$.
2. On peut retrouver le résultat à partir de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,,b]$. D'où $F' = f$, or f est positive, donc F est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $F(b) \geq F(a)$.
3. **Attention !** Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur l'intervalle $[a\,,b]$, sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

PROPRIÉTÉ 5.3. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,,b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 5.4. On applique la propriété 5.1 à la fonction $g - f$ qui est positive, ainsi que la propriété de linéarité de l'intégrale.

PROPRIÉTÉ 5.5 (INÉGALITÉ DE LA MOYENNE). Soit une fonction f continue sur un intervalle I.

— Si les réels m et M sont tels que, pour tout x de l'intervalle I, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors si $I = [a, b]$ avec $a < b$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

— Si le réel M est tel que, pour tout x de l'intervalle I, on a $0 \leq |f(x)| \leq M$, alors pour tous éléments a et b de I :

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M\,|b-a|\,.$$

Remarques 5.6. 1. Dans le premier cas, on applique la propriété 5.3 à l'inégalité $m \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,,b]$.

2. Dans le second cas, on applique la propriété 5.3 à l'inégalité $-M \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ ou $[b\,,a]$ selon que $a < b$ ou $a > b$.

Exemple 5.7. Soit la fonction inverse sur l'intervalle $[1\,,2]$. On a : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1,$$

soit $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$.

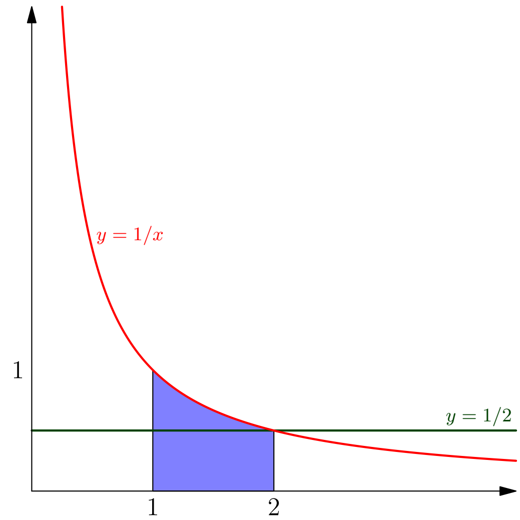


FIGURE 10 – $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1$

Définition 5.8 (Valeur moyenne). Soit une fonction f, continue sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 5.9. Cette définition généralise la notion de valeur moyenne d'une fonction dans le cas où l'intégrale définissait une aire. Cette fois-ci, la formule est valable dans le cas où celle-ci a un signe non constant sur l'intervalle $[a\,,b]$.

Exemples 5.10. 1. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ est :

$$\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos \pi\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

2. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$ est 0.

3. La valeur moyenne de la fonction définie par $x \mapsto x^2 - 1$ sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}]$ est :

$$\frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-3/2}^{3/2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{3/2} = -\frac{1}{4}.$$