LEÇON N° 35

Fonctions exponentielle et logarithme népérien. Applications

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES

Prérequis

Notions de dérivabilité, existence d'une solution d'équa diff, bijection, fonctions logarithmes, limites, théorème des valeurs intermédiaires, primitives, intégrales, théorème des accroissement finis, résolution d'une équation du second degré, théorème des gendarmes.

Références

— G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S*. Bordas, Programme 2001.
— G. COSTANTINI, *Exercices rédigés sur les exponentielles et les logarithmes*. URL : `http://bacamaths.net`.
— G. COSTANTINI, *Fonctions logarithmes*. Cours de Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`.
— J.-E. VISCA, *Les croissances comparées*. URL : `http://visca.pagesperso-orange.fr/html/aide/comparees.pdf`.
— R. GALANTE, *Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Application.* URL : `http://leahpar.etnalag.free.fr/images/cours/analyse_oral/croiss_comp.pdf`.

Table des matières

1 Fonctions exponentielles

1.1 La fonction exponentielle

Définition 1.1. Soit a un nombre réel. On appelle solution sur l'intervalle I de l'*équation différentielle $Y' = aY$* toute fonction dérivable sur I, qui vérifie sur I : $f' = af$.

Exemples 1.2.

1. La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 2Y$.
2. Les fonctions constantes sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 0Y$.

Remarque 1.3. L'équation différentielle $Y' = aY$, notée aussi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay$, exprime une proportionnalité entre la fonction et sa dérivée. Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes (en physique,...).

PROPRIÉTÉ 1.4 (THÉORÈME D'EXISTENCE). Il existe une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$ que l'on appelle la *fonction exponentielle*.

Remarque 1.5. On notera provisoirement la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$.

PROPRIÉTÉ 1.6. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 1.6.* Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = \exp(x)\exp(-x).$$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi'(x) = \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x).$$

Or $\exp' = \exp$ donc $\Phi'(x) = 0$. La fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 car $\exp(0) = 1$. Puisque $\exp(x)\exp(-x) = 1$, la fonction $\exp$ ne s'annule jamais.

On démontre, par l'absurde, que la fonction $\exp$ est strictement positive. S'il existait x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$, alors $\exp$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\exp$ sur $[0, x_0]$ ou $[x_0, 0]$, on trouverait une solution à l'équation $\exp(x) = 0$. Ceci est faux puisqu'on a montré que $\exp$ ne s'annule jamais, donc x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$ n'existe pas. □

PROPRIÉTÉ 1.7. Soit a un réel donné. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = aY$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\exp(ax)$ où k est une constante réelle.

◊ *Démonstration de la propriété 1.7.* La fonction $f : x \mapsto k\exp(ax)$, où k est un réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, vérifie

$$f'(x) = ka\exp(ax)$$

soit $f'(x) = af(x)$. Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Y' = aY$. Soit g une autre fonction sur $\mathbb{R}$ de $Y' = aY$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$. Comme la fonction $\exp$ ne s'annule pas, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $u : x \mapsto \frac{g(x)}{\exp(ax)}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, après simplification :

$$u'(x) = \frac{g'(x) - ag(x)}{\exp(ax)}.$$

Or $g'(x) = ag(x)$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 0$. u est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{g(x)}{\exp(ax)}$ est constant, soit $g(x) = k\exp(ax)$. □

1.2 La notation e^x

PROPRIÉTÉ 1.8. Pour tous nombres réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

◊ *Démonstration de la propriété 1.8.* Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x+b)$ où b est un nombre réel. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$g'(x) = \exp'(x+b) = \exp(x+b) = g(x)$$

g vérifie l'équation $Y' = Y$. Donc d'après la propriété 1.7, $g(x) = k\exp(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x+b) = k\exp(x)$$

et pour $x = 0$,

$$\exp(b) = k\exp(0).$$

or $\exp(0) = 1$ donc $k = \exp(b)$ et on a

$$\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b).$$

□

PROPRIÉTÉ 1.9. Le nombre réel $\exp(1)$ se note e. On a $\mathrm{e} \simeq 2,72$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Remarques 1.10. Ainsi $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ a un sens, c'est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$. On a aussi :

$$\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},\ \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Conséquence 1.11.

1. Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b,\ \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a},\ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}.$$

2. Pour tout nombre réel a et tout rationnel r : $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$.

Démonstration. $\diamondsuit$

— Tout d'abord, on montre que, pour tout nombre n entier naturel, on a la propriété « Pour tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$ ». La propriété est vraie pour $n = 0$ car, par définition de la fonction $\exp$: $\exp(0) = 1$. Supposons que, pour un entier k, on ait $\exp(ka) = (\exp(a))^k$. Alors, d'après la propriété 1.6, on a :

$$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a).$$

Donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$. Si on la suppose vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k + 1$, et donc par récurrence, elle est vraie pour tout nombre entier $n \geq 0$.

— Par définition, $\exp(1) = \mathrm{e}$ et d'après la propriété 1.6,

$$\exp(1) \times \exp(-1) = \exp(1 - 1) = 1.$$

Donc $\exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.
Si x est un entier positif, on peut écrire $x = na$ avec $a = 1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Si x est un entier négatif, on peut écrire $x = na$ avec $a = -1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times (-1)) = (\exp(-1))^n.$$

Or

$$(\exp(-1))^n = (\mathrm{e}^{-1})^n = \mathrm{e}^{-n}.$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

— Si x est un nombre rationnel, on peut écrire $x = pa$ avec $a = \frac{1}{q}$, q entier strictement positif et p un entier relatif.

$$\exp(qa) = (\exp(a))^q$$

Or $qa = 1$ donc $(\exp(a))^q = \mathrm{e}$. Soit $\exp(a) = \mathrm{e}^{1/q}$.

$$\exp(x) = \exp(pa) = (\exp(a))^p.$$

Soit

$$\exp(x) = \left(\mathrm{e}^{1/q}\right)^p = \mathrm{e}^{p/q} = \mathrm{e}^x.$$

Donc, pour tout x élément de $\mathbb{Q}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

— On admet que l'on peut étendre cette propriété à $\mathbb{R}$ et on convient de noter e^x le nombre $\exp(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

□

Exemples 1.12. 1. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}\mathrm{e}^x$
2. $\mathrm{e}^{x-2} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2}$
3. $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $\mathrm{e}^{x/2} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.

Remarque 1.13. Ne pas confondre $\mathrm{e}^{(a^b)}$ et $(\mathrm{e}^a)^b$; ainsi $\mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$ alors que $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

1.3 Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

D'après sa définition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée.

Conséquence 1.14. 1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

◊ *Démonstration de la conséquence 1.14.* Le premier point découle immédiatement de la définition de la fonction exp. On a $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et d'après la propriété 1.6, exp est strictement positive. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en 0 donc son taux de variation $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$ a pour limite en 0 le nombre dérivé de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0, soit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

□

Propriété 1.15 (Limites).

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

◊ *Démonstration de la propriété 1.15.* — Pour étudier la limite en $+\infty$, on montre d'abord que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, on obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Comme, pour tout x, $f(x) \geq 0$, on a $\mathrm{e}^x \geq x$ et, d'après un des théorèmes « des gendarmes », on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

— Pour étudier la limite en $-\infty$, on pose $X = -x$ et on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X}$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-X} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0,$$

soit $\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

□

On obtient le tableau de variations de la fonction $\exp$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
							$+\infty$
						$\nearrow$	
					e		
e^x				$\nearrow$			
			1				
		$\nearrow$					
	0						

— La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ passe par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, \mathrm{e})$.
— La tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au point de coordonnées $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$. De plus, pour h « assez petit » : $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$.
— La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de l'axe des abscisses, qui est une droite asymptote.

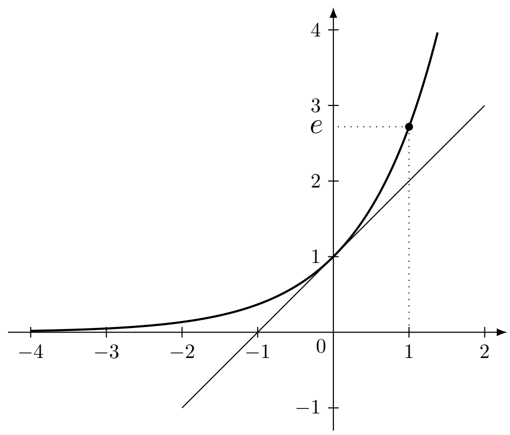


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle et de sa tangente en $x = 0$

Conséquence 1.16.
1. Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
2. Pour tous nombres réels x et y : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$ équivaut à $x = y$ et $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^y$ équivaut à $x > y$.

Exemples 1.17.
1. $\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x+1}$ équivaut à $3x = x + 1$.
2. $\mathrm{e}^x \geq 1$ équivaut à $x \geq 0$.
3. $\mathrm{e}^x \leq 1$ équivaut à $x \leq 0$.

PROPRIÉTÉ 1.18. Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 1.18.* D'après le théorème de la dérivée d'une fonction composée, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. $\square$

Exemple 1.19. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$.

PROPRIÉTÉ 1.20 (LIMITES FONDAMENTALES).
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 1.20.* Dans la démonstration de la propriété 1.15, on a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $x\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x\mathrm{e}^x = -\frac{X}{\mathrm{e}^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. $\square$

Conséquence 1.21. Pour tout nombre entier n strictement positif :
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

$\Diamond$ *Démonstration de la conséquence 1.21.*
1. Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n \mathrm{e}^x = (-X)^n \mathrm{e}^{-X}$, soit $x^n \mathrm{e}^x = (-1)^n \frac{X^n}{\mathrm{e}^x}$. Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = \lim_{X \to +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{\mathrm{e}^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X \to +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$.

□

Exemples 1.22. 1. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^{10}}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Soit $g : x \mapsto x^{1000} \mathrm{e}^x$,

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 1.23. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « $\exp$ l'emporte sur x ».

2 Fonctions logarithmes

2.1 Introduction de la fonction logarithme

2.1.1 Introduction du logarithme par les primitives

THÉORÈME 2.1. La fonction « inverse », définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique primitive F qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

L'argument principal est que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 2.2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ (restriction de la fonction « inverse » à $]0\,,+\infty[$. La fonction *logarithme népérien* noté $\ln$ est *la* primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

2.1.2 Introduction du logarithme par l'exponentielle

PROPRIÉTÉ 2.3. Pour tout nombre réel a strictement positif, il existe un réel unique α tel que $\mathrm{e}^\alpha = a$. On appelle ce nombre *le logarithme népérien* de a. On le note $\ln a$.

◊ *Démonstration de la propriété 2.3.* La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]0\,,+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,,+\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet des solutions. Or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il y a donc un et un seul nombre réel α tel que $\mathrm{e}^\alpha = a$. □

Exemples 2.4. 1. Le nombre α tel que $\mathrm{e}^\alpha = 3$ est $\ln 3$.

2. $\ln 5$ est le nombre dont l'image par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est 5 ; ainsi $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.

2.1.3 Conséquences des définitions du logarithme

On va se placer dans le cadre où on a introduit le logarithme par l'unique primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

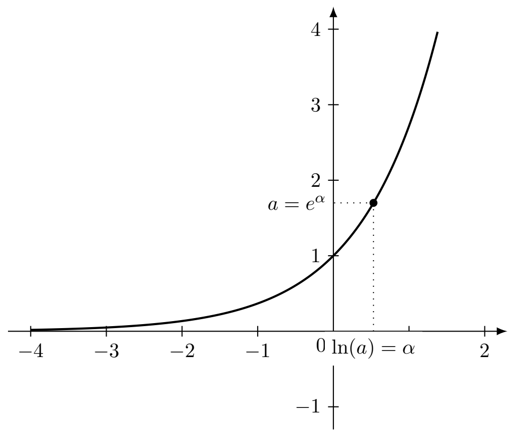


FIGURE 2 – Définition du logarithme népérien avec la fonction exponentielle

Conséquence 2.5.

1. La fonction primitive est définie sur le même intervalle que la fonction considérée, donc la fonction $\ln$ est définie sur $]0\,,+\infty[$.
2. $\ln(1) = 0$.
3. la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$. La fonction $\ln$ est continue sur $]0\,,+\infty[$ puisque dérivable sur cet intervalle
4. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$ puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, ce qui permet une première esquisse de son tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
signe de la dérivée $\frac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	$+$
variation de la fonction $\ln$	$\|\|$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

5. Ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction $\ln$:
   — $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
   — $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
   — $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
6. La fonction $\ln$ étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur l'intervalle image. On en déduit que pour tous réels a et b de $]0\,,+\infty[$, on a :
   — $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$,
   — $\ln a < \ln a \Leftrightarrow a < b$.
   En effet, si $a = b$ alors il est clair que $\ln a = \ln b$. De même, si $a < b$ alors (stricte croissante du ln) $\ln a < \ln b$.

2.2 Des exemples

Exemples 2.6.

1. On veut déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par :
   — $f(x) = \ln(x + 3)$
   — $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.
   On pose $F(x) = x + 3$ et $G(x) = x^2 - x - 2$. Les deux fonctions f et g sont définies si le logarithme des deux fonctions F et G sont définies, ce qui équivaut à la positivité stricte des deux fonctions F et G.
   — $F(x) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Donc f est définie sur l'intervalle $]-3\,,+\infty[$.
   — $G(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$. On résout $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme est

$\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9$. Donc :
$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$
Or le signe du coefficient de x^2 est positif donc $G(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,,-1\right[\cup [2\,,+\infty]$. Donc g est définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,,-1\right[\cup [2\,,+\infty]$.

2. On veut dériver la fonction f définie par $f(x) = 3 - x + \ln x$. La fonction f est dérivable car c'est une somme de fonctions dérivables. On rappelle que comme $x \mapsto \ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, la dérivée de la fonction logarithme est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donc :
$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}.$$
3. On veut résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$. Ceci est équivalent à résoudre le système d'équation/inéquation suivant :
$$\begin{cases} 2x+1 = 3-x \\ 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$
Or :
$$2x+1 = 3-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$
et on vérifie les deux autres conditions du système :
$$2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$
Donc la solution de l'équation proposée est $x = \frac{2}{3}$.

2.3 Théorème fondamental

THÉORÈME 2.7. Pour tous réels a et b strictement positifs :
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$
On dit que la fonction logarithme transforme les produits en somme.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.7.* Pour tout réel a strictement positif, on pose la fonction G définie sur $]0\,,+\infty[$ par :
$$G(x) = \ln(ax).$$
La fonction G est dérivable (G est une composée de fonctions dérivables : $G = v \circ u$ avec $u(x) = ax$ et $v = \ln$) et :
$$G'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$
La fonction G est donc une primitive de la fonction inverse tout comme la fonction $\ln$. Elles diffèrent donc d'une constante c :
$$G(x) = \ln x + c \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln x + c.$$
On calcule la constante c, si $x = 1$, on a :
$$\ln a = \ln 1 + c = 0 + c,$$
d'où $c = \ln a$ et finalement :
$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \quad \text{pour tout réel } x \in]0\,,+\infty[.$$
$\square$

Remarque 2.8. Si a et b sont strictement négatifs, on a une relation analogue :

$$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$$

et plus généralement, pour tout réels a et b de $\mathbb{R}^*$:

$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|\,.$$

Conséquence 2.9. Pour tous réels a et b strictement positifs :

1. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$,
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
3. $\ln a^p = p \ln a$, $(p \in \mathbb{Z})$,
4. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

◊ *Démonstration de la conséquence 2.9.*

1. $0 = \ln 1 = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ d'où $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Si $p > 0$ alors

$$\ln a^p = \ln(a \times a \times \cdots \times a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = p \ln a.$$

   Si $p < 0$ alors

$$\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln(a^{-p}) = -(-p) \ln a = p \ln a.$$

4. Voir la section 3.2.

□

2.4 Etude de la fonction $\ln$

2.4.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0\,,+\infty[$

THÉORÈME 2.10.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

où $x \to 0^+$ signifie x tend vers 0 par valeurs supérieures.

◊ *Démonstration du théorème 2.10.* On établit le deuxième résultat. Soit p un entier naturel. On a $\ln 2^p = p \ln 2$. D'où :

$$\lim_{p\to+\infty} \ln 2^p = \lim_{p\to+\infty} p \ln 2 = +\infty.$$

Soit x un nombre réel tel que $x \geq 2^p$. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln x \geq \ln 2^p$. On passe à la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \geq \lim_{p\to+\infty} \ln 2^p.$$

Or, $\lim_{p\to+\infty} \ln 2^p = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Le premier résultat en découle simplement par changement de variable :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty.$$

□

THÉORÈME 2.11. La fonction $\ln$ est une bijection (strictement croissante) de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.11.* La stricte croissance et la bijectivité ont déjà été établies. En outre, comme

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

et comme la fonction $\ln$ est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$. l'intervalle image de $]0\,,+\infty[$ par la fonction $\ln$ est donc $\mathbb{R}$. $\square$

2.4.2 Le nombre e

Puisque la fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel $\ln x = \lambda$ admet une unique solution dans $]0\,,+\infty[$.

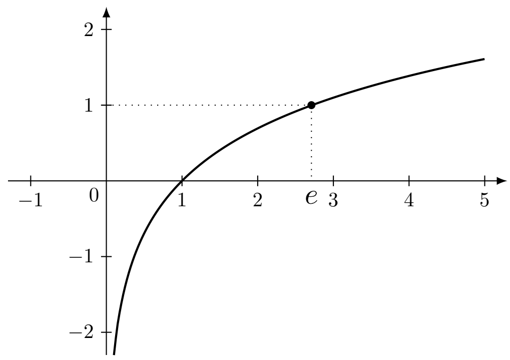
Définition 2.12 (Base du logarithme népérien). On note e l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. Ce nombre e s'appelle *base* du logarithme népérien.

On a donc $\ln \mathrm{e} = 1$ et par la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots$. Plus généralement, $\ln \mathrm{e}^p = p \ln \mathrm{e} = p$.

Exemple 2.13. Soit à résoudre $\ln(x+3) = 9$, pour $x > -3$:

$$\ln(x+3) = \ln \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x + 3 = \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^9 - 3 \approx 8100.$$

2.4.3 Représentation graphique de la fonction $\ln$



2.5 Limites de références

Lemme 2.14. La représentation graphique de la fonction $\ln$ est toujours située sous la première bissectrice $(y = x)$:

$$\ln x < x \text{ pour tout } x > 0.$$

$\Diamond$ *Démonstration du lemme 2.14.* On considère la fonction f définie sur $I =]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Sa dérivée f' est définie sur I par :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
signe de f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 1 :

$$m = f(1) = 1 - \ln 0 = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement positive pour tout réel x positif, d'où le lemme. $\square$

Remarque 2.15. On a même $\ln x \leq x - 1$, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$.

THÉORÈME 2.16.

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

3. $$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

4. $$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0, \quad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

5. $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

$\diamondsuit$ *Démonstration du théorème 2.16.* D'après le lemme précédent, on peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X} \right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

$\square$

Remarque 2.17. La dernière limite peut s'écrire sous d'autres formes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Corollaire 2.18. Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

$\Diamond$ *Démonstration du corollaire 2.18.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. $\square$

Exemples 2.19.

1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

D'où par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

2.6 Dérivées et primitives

THÉORÈME 2.20. Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

C'est une conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

THÉORÈME 2.21. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

Pour la démonstration de ce théorème, on peut utiliser le précédent en dérivant $\ln|u|$. On distinguera les intervalles où $u > 0$ de ceux où $u < 0$.

Exemple 2.22. On veut dériver sur $]0\,,+\infty[$ la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x).$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}.$$

3 Applications

3.1 Seuil

1. Déterminer le plus grand réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :
$$ax \leq \mathrm{e}^x.$$
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
$$\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{xy} \geq \mathrm{e}^2.$$
3. *Moyenne arithmétique et géométrique, comparaison.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n)$ n réels positifs.
$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{(moyenne arithmétique)}$$
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad \text{(moyenne géométrique)}$$
Prouver que $G_n \leq A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer les entiers pour lesquels $2^n \geq n^2$.
5. Comparer π^{e} et e^π.

◊ *Solution.* 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $h(x) = ax - \exp(x)$. On veut trouver le plus grand réel a tel que $ax - \exp(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On calcule la dérivée de la fonction h :
$$h'(x) = a - \exp(x).$$
On obtient :
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow a - \exp(x) = 0 \Leftrightarrow a = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(a)$$
$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \ln(a)$$
$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

La fonction h est donc croissante quand $x < \ln(a)$ et décroissante quand $x > \ln(a)$. On a de plus :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$$

donc h admet donc un maximum en $x = \ln(a)$.
Il faut donc trouver a tel que $h(x) = ax - \exp(x) = 0$ en $x = \ln(a)$. C'est-à-dire :

$$h(\ln(a)) = a\ln(a) - \exp(\ln(a)) = a\ln(a) - a = a(\ln(a) - 1) = 0$$

Soit à résoudre :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad \ln(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}.$$

Or on a fait comme condition $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc la seule solution à notre problème est $a = \mathrm{e}$.

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. En utilisant les propriétés de l'exponentielle, on peut transformer le membre de gauche de l'inégalité :

$$\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{xy} = \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y}{xy} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{\mathrm{e}^y}{y}.$$

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est toujours supérieure à e pour $x > 0$. Calculons la dérivée f' de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de la dérivée f' de la fonction f est du signe de l'expression $\frac{x-1}{x^2}$, c'est-à-dire :

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

La fonction f est donc décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \text{ (croissance comparée).}$$

Donc la fonction f admet un minimum en $x = 1$ et $f(1) = \frac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$. D'où :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \mathrm{e}$$

pour tout $x > 0$ et ainsi :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{\mathrm{e}^y}{y} \geq \mathrm{e} \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^2$$

pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

3. On étudie les variations de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - x.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 1.$$

On en déduit, par croissance du logarithme, que :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

D'où les variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f'	$-$	0	$+$
Variations de la fonction f	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 1 et :

$$f(1) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0.$$

Comme ce minimum est nul, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a bien :

$$\mathrm{e}^{x-1} \geq x.$$

En spécialisant, pour chaque $1 \leq i \leq n$, l'inégalité précédente avec $x = \frac{a_i}{A_n}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{(a_i/A_n)-1} \geq \frac{a_i}{A_n}.$$

En multipliant, membre à membre les inégalités ci-dessus (tous les membres sont positifs), il vient :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(a_i/A_n)-1} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_n}$$

et comme l'exponentielle transforme les sommes en produit, on peut écrire :

$$\mathrm{e}^{\sum_i (a_i/A_n)-1} \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{A_n^n}$$

$$\mathrm{e}^{(\sum_i a_i/A_n)-n} \geq \frac{G_n^n}{A_n^n}$$

et puisque $\sum_i \frac{a_i}{A_n} - n = 0$, il vient :

$$1 \geq \frac{G_n^n}{A_n^n}.$$

On a donc :

$$A_n^n \geq G_n^n$$

Par croissance du logarithme ($A_n \geq 0$ et $G_n \geq 0$) :

$$\ln(A_n^n) \geq \ln(G_n^n).$$

D'après les propriétés du logarithme :

$$n \ln A_n \geq n \ln G_n.$$

Comme n est non nul :

$$\ln A_n \geq \ln G_n$$

Et enfin par croissance de l'exponentielle :

$$A_n \geq G_n.$$

4. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$. D'après les règles de calculs sur les logarithmes :

$$f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x.$$

$$f(2) = \ln 4 - \ln 4 = 0 \quad \text{et} \quad f(4) = \ln 16 - \ln 16 = 0.$$

On a :

$$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}.$$

Comme $x > 0$, on a :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \ln 2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{\ln 2}.$$

On en déduit les variations de f :

x	0		2		$\frac{2}{\ln 2}$		4		$+\infty$
Signe de f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Variations de la fonction f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit : $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 4]$.
On recherche maintenant les entiers n pour lesquels on a : $2^n \geq n^2$, c'est-à-dire $f(n) \geq 0$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

5. La calculatrice donne :

$$\pi^{\mathrm{e}} \approx 22,46 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\pi} \approx 23,14 (\text{à } 10^{-2} \text{ près}).$$

On sait que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln x \leq x - 1.$$

En spécialisant $x = \frac{\pi}{\mathrm{e}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}}\right) &\leq \frac{\pi}{\mathrm{e}} - 1 \\ \ln \pi - 1 &\leq \frac{\pi - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e} \ln \pi - \mathrm{e} &\leq \pi - \mathrm{e} \\ \ln(\pi^{\mathrm{e}}) &\leq \pi \end{aligned}$$

D'où : $\pi^{\mathrm{e}} \leq \mathrm{e}^{\pi}$.

□

3.2 Exponentielles de base a

Définition 3.1. Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre réel b, on pose :

$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}.$$

Remarques 3.2.

1. Cette définition donne un sens à une écriture telle que $\pi^{\sqrt{2}}$.
2. Elle est cohérente avec la puissance rationnelle d'un nombre $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 3}$. Or $\frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$ donc $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\ln \sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exemples 3.3 (Sur calculatrice TI82)..

```
> Pi^(V^(2))=e^(V^(2)*ln(Pi))
1
> Pi^(V^(2))
5.047487267
```

```
> e^(3*ln(2))
8
> (-3)^5
-243
> (-3)^(Pi)
ERR:REP NONREEL
1:Quitter [EXE]
> 3^(-Pi)
.0317014678
```

PROPRIÉTÉ 3.4. Pour tous nombres réels a et a' strictement positifs et tous nombres réels b et b' :

1. $\ln a^b = b \ln a$.
2. $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$.
3. $a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$
4. $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.
5. $(aa')^b = a^b a'^b$.
6. $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$.

Remarque 3.5. Les propriétés des puissances d'exposants entiers s'étendent, pour les nombres strictement positifs, aux puissances d'exposants réels.

Exemples 3.6.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi = \frac{1}{2^\pi} = 2^{-\pi}$,
2. $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}}$.

Définition 3.7 (Exponentielle de base a). Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto a^x$ par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. On l'appelle fonction *exponentielle de base* a.

Exemples 3.8.

1. La fonction $f : x \mapsto 5^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $5^x = \mathrm{e}^{x \ln 5}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \ln 5 \times \mathrm{e}^{x \ln 5} = \ln 5 \times 5^x.$$
2. La fonction $g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-x \ln 2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'(x) = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

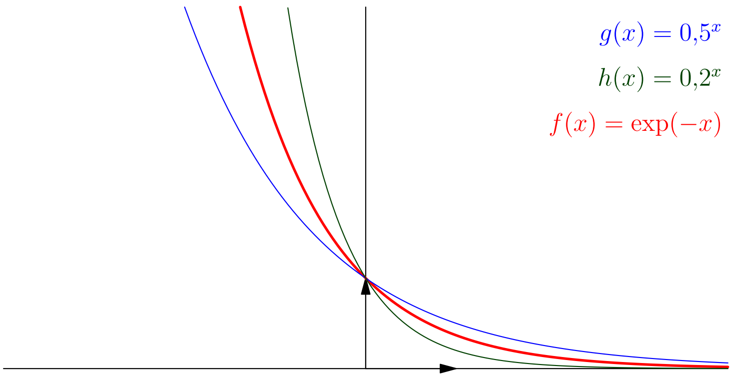
On peut tracer le tableau de variations de $x \mapsto a^x$ en distinguant deux cas :

1. Si $0 < a < 1$:

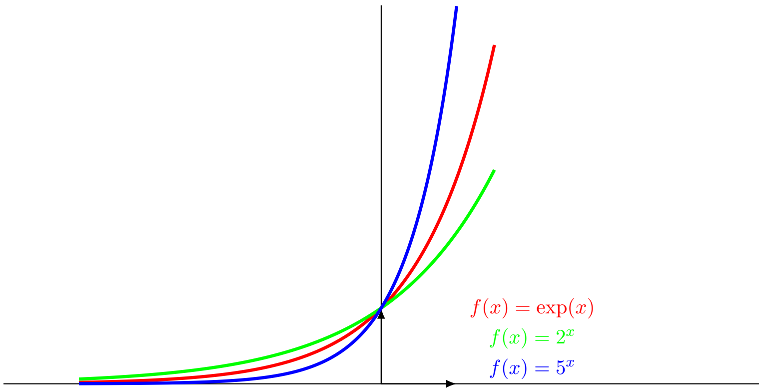
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

2. Si $1 < a$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



(a) $0 < a < 1$



(b) $1 < a$

FIGURE 3 – Représentation graphique de $x \mapsto a^x$

3.3 Le logarithme n'est pas une fonction rationnelle

PROPOSITION 3.9. La fonction logarithme népérien n'est pas une fonction rationnelle.

Démonstration. $\diamondsuit$ Supposons que $\ln(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q étant des polynômes. Par $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\deg P \geq \deg Q + 1$. Or $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{P(x)}{xQ(x)}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \neq 0$ car $\deg P \geq \deg xQ$. C'est absurde. $\square$

Remarque 3.10. On peut simplifier la démonstration sans utiliser les croissances comparées. On raisonne toujours par l'absurde en supposant que $\ln = \frac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes premiers enter eux. En dérivant membre à membre on obtient :

$$\frac{1}{X} = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 = XP'Q - XQ'P.$$

3.4 Image d'une suite géométrique

PROPOSITION 3.11. L'image d'une suite géométrique de raison $r > 0$ par la fonction logarithme est une suite arithmétique de raison $\ln r$.

Démonstration. $\Diamond$ La preuve est immédiate en utilisant les propriétés algébriques du logarithme. $\square$

3.5 Approximation du logarithme népérien d'un réel

PROPOSITION 3.12. Soit $a > 1$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \geq 0$, $v_n = 2^n(u_n - 1)$ converge vers $\ln a$.

Démonstration. $\Diamond$ On montre tout d'abord que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

$$\forall n > 0, \quad u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} \leq \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

D'où, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (x - 1)$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ln(a)$. En étudiant les fonctions $f\colon h \mapsto h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(1+h)$ et $g\colon h \mapsto h \leq \ln(1+h)$, on montre que :

$$\forall h > 0, h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(1+h) \leq h.$$

De cette inégalité, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0, \quad -\frac{(a-1)^2}{2^{n+1}} \leq \ln(a) - v_n \leq 0.$$

Ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. $\square$

4 Croissances comparées

4.1 Introduction

4.1.1 Rappel sur les formes indéterminées

PROPRIÉTÉ 4.1. Les formes indéterminées sont de quatre types :

1. du type $\infty - \infty$
2. du type $0 \times \infty$
3. du type $\frac{\infty}{\infty}$
4. du type $\frac{0}{0}$

4.1.2 Croissance comparée, à quoi ça sert ?

Les croissances comparées permettent de lever ce genre d'indétermination. Elles interviennent quand on calcule une limite :

— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et un logarithme ;
— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et une exponentielle.

On établit donc un « rapport de force » entre ces classes de fonctions. On va dire qu'une classe de fonction tend plus au moins rapidement vers l'infini qu'une autre classe de fonction. Du plus fort au plus faible, on a :

— exponentielles ;
— puissances ;
— logarithmes.

Cela se voit encore mieux sur un graphique (voir la figure 4).

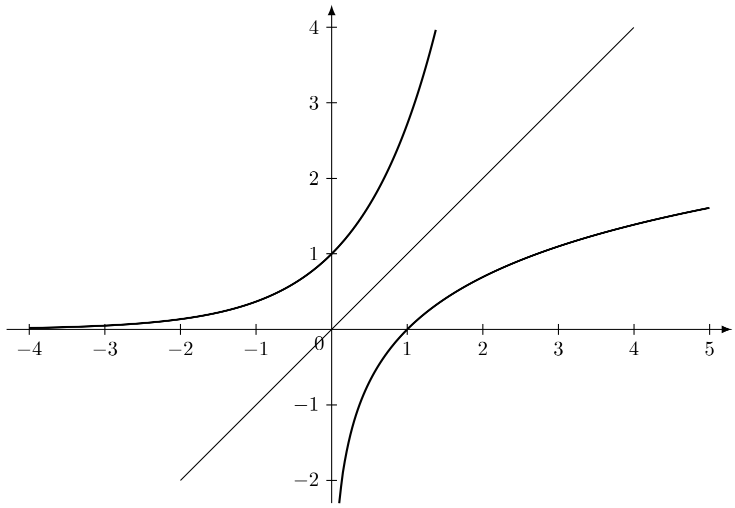


FIGURE 4 – Croissances comparées

4.2 Croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes

THÉORÈME 4.2.

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

4. $$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 4.2.* On peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x\to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Corollaire 4.3. Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

◊ *Démonstration du corollaire 4.3.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Exemples 4.4.

1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

   On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

   Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

   D'où par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

   En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$

   En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

   Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

4.3 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles

PROPRIÉTÉ 4.5 (LIMITES FONDAMENTALES).

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

◊ *Démonstration de la propriété 4.5.* On a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $x\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x\mathrm{e}^x = -\frac{X}{\mathrm{e}^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. □

Conséquence 4.6. Pour tout nombre entier n strictement positif :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

◊ *Démonstration de la conséquence 4.6.*

1. Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x=-X$, $x^n\mathrm{e}^x=(-X)^n\mathrm{e}^{-X}$, soit $x^n\mathrm{e}^x=(-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x=\lim_{X\to+\infty}(-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty}(-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^X}=0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x=0$.

□

Exemples 4.7. 1. Soit $f : x\mapsto\frac{\mathrm{e}^x}{x^{10}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2. Soit $g : x\mapsto x^{1000}\mathrm{e}^x$,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0.$$

Remarque 4.8. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « $\exp$ l'emporte sur x ».

4.4 D'autres exemples

Exemples 4.9. 1. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+x^2+1.$$

Ici, nous n'avons pas besoin des croissances comparées pour déterminer la limite car :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+x^2+1=+\infty.$$

2. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x-x^2.$$

Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. On remarque alors que :

$$\mathrm{e}^x-x^2=\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$, ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x-x^2=+\infty.$$

3. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x^2+2x+1.$$

Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. On remarque alors que :

$$\ln(x)-x^2+2x+1=x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x^2+2x+1=-\infty.$$

4. Soit à calculer
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}.$$
On rencontre donc une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$, on a donc
$$\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = u^2\mathrm{e}^u.$$
On a
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
et, par croissances comparées, $\lim_{u\to-\infty} u^2\mathrm{e}^u = 0$. Donc, par composition :
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = 0.$$

4.5 Applications

4.5.1 Branches infinies des courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$

PROPRIÉTÉ 4.10. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ admettent des branches paraboliques de directions respectives $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$.

$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 4.10.* En effet,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$
$\square$

4.5.2 Détermination de limites

Exemples 4.11. 1. Soit à calculer
$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$
Comme $x > 0$, on peut écrire :
$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$$
Or, par croissances comparées :
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$
Donc, par composition
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

2. Soit à calculer
$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{(\ln x)^{-\alpha}}, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$
On a tout d'abord :
$$\ln(x)^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}$$
et ainsi :
$$(\ln(x))^{(\ln x)^{-\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}\ln(\ln(x))}$$
Or, pour $\alpha > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} -\alpha\ln\ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$$

mais par croissances comparées, « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme » donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}\ln(\ln(x)) = 0$$

et par composition

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{(\ln(x))^{-\alpha}} = 1.$$

3. On considère la fonction définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On veut étudier la dérivabilité de f en 0 et 1. On a :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{x\to1^-} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

Donc f est continue sur $[0\,,1]$, de plus elle est dérivable sur $]0\,,1[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty,$$

donc f est non dérivable en 0. Puisque $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\ln x} = -\infty$ alors,

$$\lim_{x\to1^-} \frac{-1}{(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où $\lim_{x\to1^-} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable à gauche en 1.

4.5.3 Une intégrale convergente

On considère l'intégrale (dépendant de x) :

$$\varphi(h) := \int_1^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On montre que φ admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout réel x fixé, $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est équivalent en $+\infty$ à $t\mapsto\frac{1}{t^2}$. On en déduit qu'il existe un réel $A>1$ tel que pour tout $h>A$ on ait

$$0 \le \varphi(h) \le \int_A^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \le \int_A^h \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h}+\frac{1}{A} \le \frac{1}{A}.$$

Donc φ est uniformément bornée, d'où le résultat.