LEÇON N° 34

Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de premières et terminales

Prérequis

Continuité en un point d'une fonction, limite en un point d'une fonction

Références

— G. COSTANTINI, *Fonctions dérivables*. Cours de Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`.

— X. DELAHAYE, *Dérivée*. Terminale S. URL : `http://xmaths.free.fr/TS/cours/cours.php?nomcours=TSdericours&page=01`.

Table des matières

1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

THÉORÈME 1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

2. Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0+h \in I$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 1.1.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour $h \neq 0$:

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

De plus :

$$h\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \ell h.$$

D'où la condition (ii) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

D'où la condition (i).

$\square$

Définition 1.2 (Nombre dérivé). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. On note

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell := f'(x_0).$$

$f'(x_0)$ est le *nombre dérivé* de la fonction f au point x_0.

Définition 1.3 (Accroissement moyen). La quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle *l'accroissement moyen de f en x_0*. Graphiquement, elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f entre les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$.

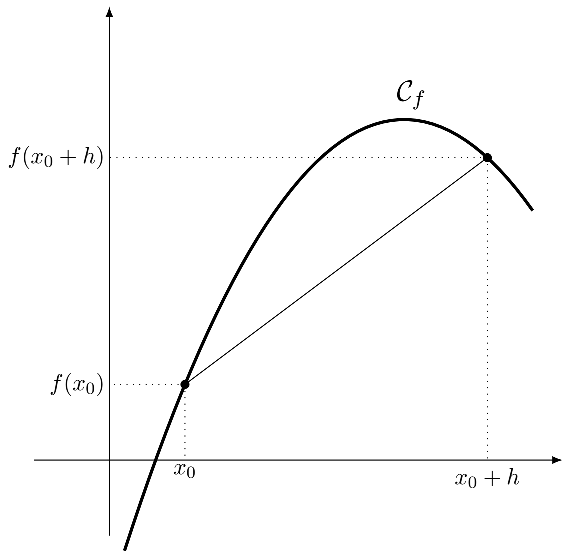

FIGURE 1 – Accroissement moyen de f

La condition (i) du théorème peut donc aussi se traduire par « l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite *finie* ».

Définition 1.4 (Dérivabilité). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que f est *dérivable* en x_0. Le nombre ℓ s'appelle alors *le nombre dérivé de f en x_0* et on le note $f'(x_0)$.

Exemples 1.5.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On étudie la dérivabilité en 0. Pour cela on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La limite n'est pas finie. La fonction « racine carrée » n'est donc pas dérivable en 0.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On étudie la dérivabilité de cette fonction en 0. Nous avons, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{|0+h|-|0|}{|h|} = \frac{|h|}{h}.$$

Or la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$

L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2 Différentes interprétations du nombre dérivé

2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé

Il représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.

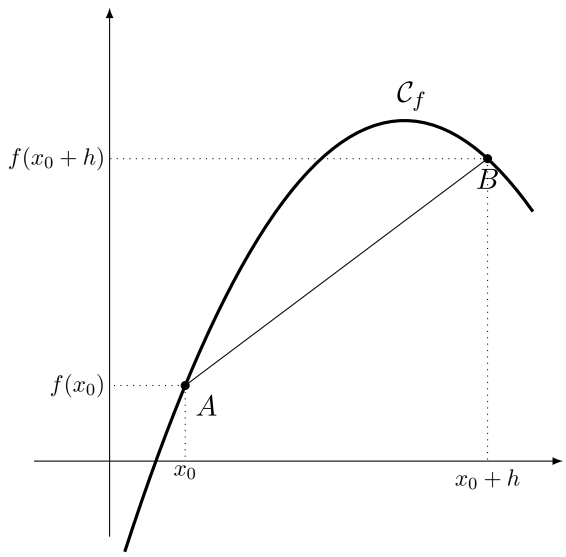

FIGURE 2 – Accroissement moyen de f

Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :

— le point B tend vers le point A
— la droite (AB) tend alors vers la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
— l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f(x_0)$. A la limite le point B est en A, la droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

2.2 Interprétation numérique du nombre dérivé

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

L'application

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

s'appelle *approximation affine de f en x_0*.

2.3 Détermination d'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse x_0

La méthode est classique : soit $M(x,y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}.$$

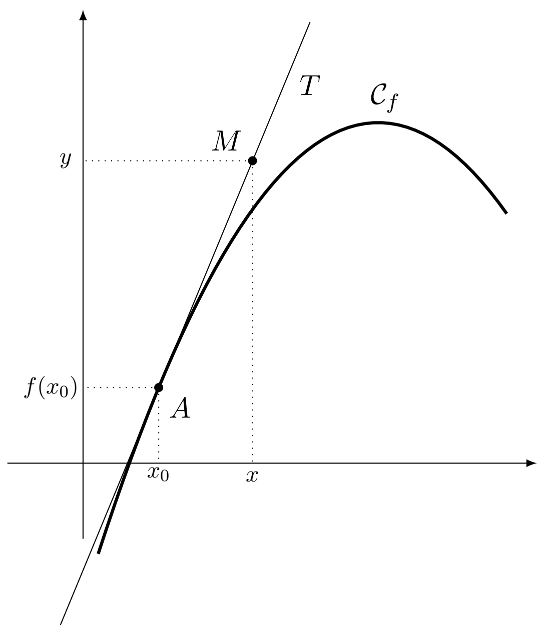

FIGURE 3 – Tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$

D'où une équation de T :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemple 2.1. On se donne la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 3.$$

On cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$. On calcule $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2 + 3 - (-2^2 + 3)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h$$

donc

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-4 - h) = -4.$$

L'équation de T est donc :

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -1 - 4(x - 2) = -4x + 7.$$

2.4 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3 Fonction dérivée

Définition 3.1 (Fonction dérivée). Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est *dérivable sur* I. On définit alors la *fonction dérivée*, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Voici un théorème fondamental :

THÉORÈME 3.2. Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 3.2.* Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

On pose $x = x_0 + h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0} \varphi(x - x_0) = 0.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)).$$

Or $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et :

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x - x_0) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est donc continue en x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I. $\square$

Remarques 3.3.

1. La réciproque du théorème 3.2 est fausse. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction « valeur absolue ».
2. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue.

Exemple 3.4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On montre que f est continue en 0. On a, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1.$$

Donc :

$$x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2.$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

puisque $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

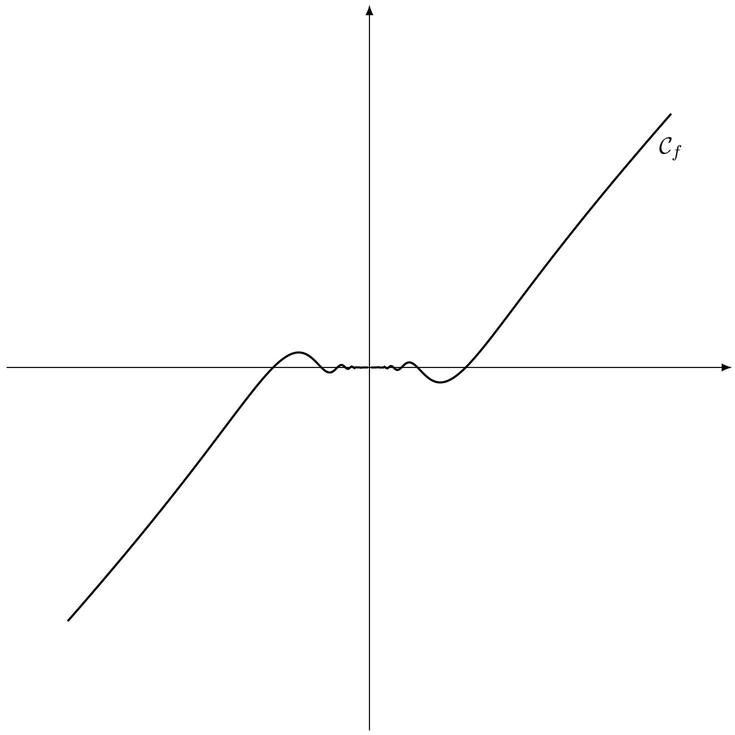

FIGURE 4 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Donc f est continue en 0. On montre que f est dérivable en 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Or :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Remarque 3.5. Si f est dérivable en x_0, alors l'application « coefficient directeur » φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ est continue en x_0 puisque

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$

4 Applications de la dérivation à l'étude de fonctions

THÉORÈME 4.1 (LIEN ENTRE LE SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET LES VARIATIONS DE LA FONCTION). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I si et seulement si
   — $f' \geq 0$ sur I (resp. $f' \leq 0$)
   — L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

Remarques 4.2.

1. Si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I,
2. il n'y a pas équivalence entre les conditions « $f' > 0$ » et « f est strictement croissante sur I ».

On applique les mêmes remarques pour « $f' < 0$ sur I ».

Exemples 4.3.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a :

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

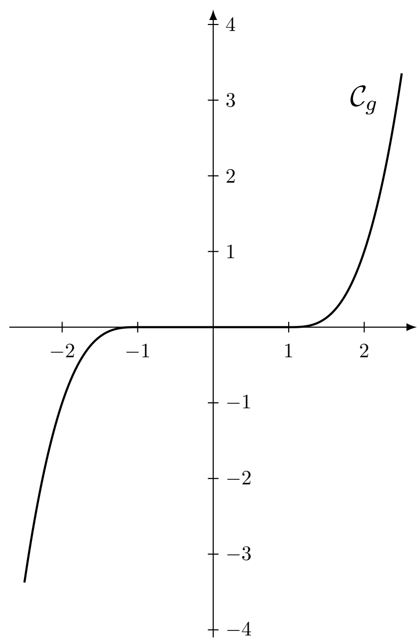

FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction g

3. Soit h la fonction définie sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-2\,,-1[\\ 1 & \text{si } x \in \,]1\,,2[\end{cases}$$

On a clairement $h' = 0$ sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$. Cependant h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition « I est un intervalle » dans le théorème précédent.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

THÉORÈME 4.4. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques 4.5. Avant de lire la démonstration, on donne quelques explications :

1. Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a\,,b[$.
2. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J, on ait $f(x) \leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 4.4.* Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$ soit contenu dans I. Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local. Pour $h \in \,]0\,,\varepsilon[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Pour $h \in \,]-\varepsilon\,,0[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \leq 0$$

d'où $f(x_0) = 0$.

Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même. □

Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0.

THÉORÈME 4.6. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis (voir compléments).

5 Dérivation d'une fonction composée et applications

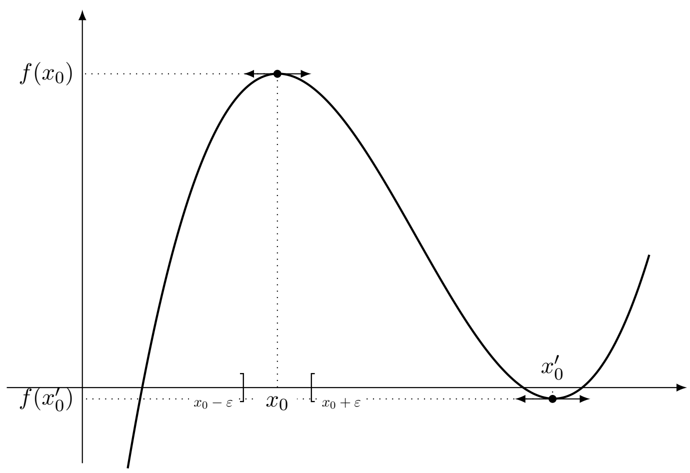

FIGURE 6 – Minimum local et maximum local d'une fonction

THÉORÈME 5.1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 5.1.* Soit $x_0 \in I$. On écrit :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

On pose $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0)$$

et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

D'où :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times v'(y_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de $v \circ u$ sur I et

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

$\square$

Conséquence 5.2. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

— Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

— Si $f = u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n \leq -1$) alors f dérivable sur I et

$f' = nu'u^{n-1}$.

Exemples 5.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$

On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+x$. la fonction u est strictement positive sur $]0\,,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}, \qquad \text{pour tout } x \in \,]0\,,+\infty[.$$

2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :

$$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6 \qquad f'(x) = 6(4x-1)(2x^2 - x + 1)^5.$$

6 Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Le tableau 1 nous donne les dérivées usuelles. Tous les résultats de ce tableau se démontre essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{t},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

TABLE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

$\Diamond$ *Exemples de démonstration de dérivée de fonctions usuelles.* 1. Si $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$, l'accroissement moyen de f en x s'écrit (on utilise la formule du binôme de Newton) :

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

On aurait pu procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit.

2. Si $f(x) = \sin(x)$. L'accroissement moyen de f en x s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x.\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

D'où :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \cos x.$$

□

Le tableau 2 donne les opérations sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I. Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$nu'u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'(v' \circ u)$	

TABLE 2 – Opérations sur les dérivées

◊ *Exemples de démonstration sur les opérations de dérivées.* 1. On veut montrer la relation $(uv') = u'v + uv'$. Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, on peut écrire :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0, \tag{1}$$

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \psi(h) = 0. \tag{2}$$

En multipliant (1) par (2), il vient :

$$\begin{aligned}u(x_0 + h)v(x_0 + h) &= (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h)) \\ &= u(x_0)v(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h)\end{aligned}$$

où

$$\Phi(h) = u(x_0)\psi(h) + u'(x_0)v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h).$$

Nous avons donc :

$$uv(x_0 + h) = uv(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \Phi(h) = 0.$$

La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. On a donc :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. On veut montrer la relation $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}.$$

Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :

$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h).$$

Remplaçons $v(x) - v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{v'(x)h + h\varphi(h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Donc f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ d'où :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. On veut montrer la relation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. On écrit :

$$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$$

et on utilise la dérivée d'un produit et le résultat ci-dessus.

□

7 Quelques inégalités

Exemples 7.1. 1. On va montrer les inégalités suivantes sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$:

(a) $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

(b) $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$.

On note $I = [0\,,\frac{\pi}{2}]$. On étudie les fonction f et g sur I par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. On a, pour $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad g''(x) = -\sin x \leq 0.$$

La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur I, donc :

$$\sin x \leq x, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I. Or :

$$g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0.$$

Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Donc g' est positive sur $[0\,,\alpha]$

puis négative sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. On en déduit que g est croissante sur $[0\,,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. Mais $g(0)=0$ et $g(\frac{\pi}{2})=0$. Donc g est positive sur I :

$$\frac{2}{\pi} \leq \sin x, \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

On montre de même que :

$$1-\frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}-x, \text{ pour tout } x \in I.$$

2. On montre que pour tout $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$x \leq \tan x.$$

On pose $f(x)=\tan x - x$, pour $x \in J=[0\,,\frac{\pi}{2}[$. On a :

$$f'(x)=\tan^2 x \geq 0, \qquad \text{pour tout } x \in J.$$

Donc f est croissante sur J. En outre, $f(0)=0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque 7.2. A l'aide de l'encadrement $\sin x \leq x \leq \tan x$ démontré ci-dessus pour $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{pour tout } x \in]0\,,\tfrac{\pi}{2}[.$$

On montre que l'encadrement est aussi valable pour $x \in]-\frac{\pi}{2}\,,0[$. Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

8 Compléments : Théorème de Rolle et accroissements finis

THÉORÈME 8.1 (THÉORÈME DE ROLLE). Soit $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$, continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, et telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a\,,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration. $\Diamond$ Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a\,,b])=[m\,,M]$. Si $m=M$ alors f est constante et donc $f'=0$ sur $]a\,,b[$. On suppose alors que $m<M$. Alors $m<f(a)$ ou $f(a)<M$.

— Si $m<f(a)$, alors il existe $c \in]a\,,b[$ tel que $f(c)=m$.

$$\forall x \in]a\,,c[, f(x)>f(c) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$
$$\forall x \in]c\,,b[, f(x)>f(c) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalités ci-dessus donne respectivement :

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$$

d'où, par continuité de f en c, $f'(c)=0$.

— si $f(a)<M$, un raisonnement analogue donne le même résultat : $f'(c)=0$.

$\square$

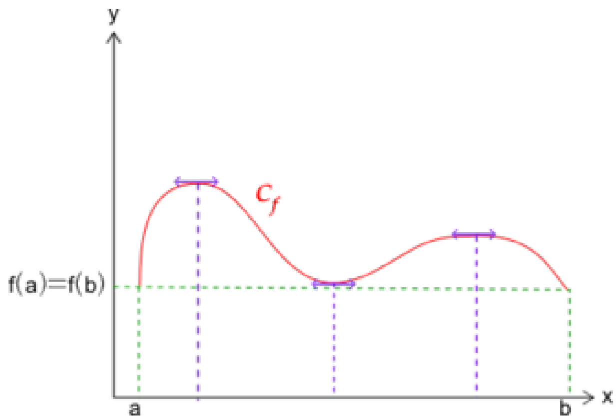

FIGURE 7 – Interprétation graphique du théorème de Rolle

THÉORÈME 8.2 (THÉORÈE DES ACCROISSEMENTS FINIS). Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$. Alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration. $\Diamond$ Soient A un réel et la fonction :

$$\begin{array}{cccl} \varphi & : & [a\,,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) - f(a) - A(x-a) \end{array}.$$

φ est clairement continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, et vérifie $\varphi(a) = 0$. On détermine alors A tel que $\varphi(b) = 0$:

$$\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On affecte alors cette valeur à A (l'existence est assuré par l'hypothèse $a < b$), de sorte que le théorème de Rolle s'applique, donnant l'existence d'un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - A = 0 \Leftrightarrow f'(c) = A \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

□

THÉORÈME 8.3 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS). Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a\,,]$ et dérivable sur $]a\,,b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in\,]a\,,b[;$, alors :

$$|f(b) - f(a)| < k\,|b-a|\,.$$

Démonstration. $\Diamond$ D'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} &\exists c \in\,]a\,,b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \\ \Rightarrow\ &\exists c \in\,]a\,,b[, |f(b) - f(a)| = \left|f'(c)\right| |b-a| \\ &\Rightarrow |f(b) - f(a)| < k\,|b-a|\,. \end{aligned}$$

□