LEÇON Nº 33

Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES

Prérequis

Fonctions

Références

- G. COSTANTINI, *Continuité*. Cours de Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`.
- G. LEAHPAR, *Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Leçon nº 60 du CAPES 2010*. URL : `http://leahpar.etnalag.free.fr/capes.html`.

Table des matières

1 Le théorème des valeurs intermédiaires **1**

2 Applications **4**

2.1 Le théorème du point fixe 4

2.2 Image d'un intervalle par une application continue 4

2.3 Image d'un segment par une application continue 5

2.4 Théorème de bijection 6

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 1.1 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES). Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 1.1.* Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a\,,b]$ est tel que $f(m) \geq m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.

— Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

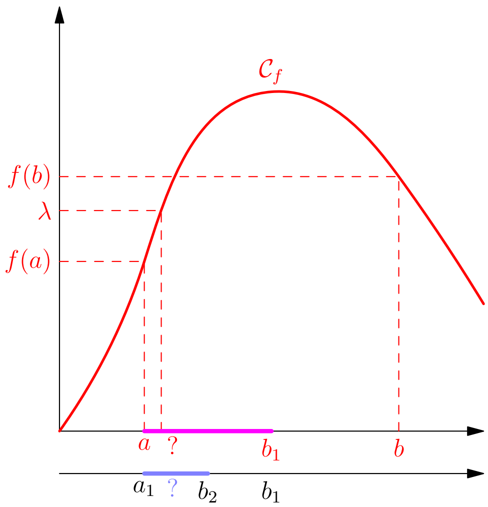
On recommence le découpage :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a_1\,,b_1]$ est tel que $f(m) \geq \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.

— Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$



En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

$$[a\,,b] \supset [a_1\,,b_1] \supset \cdots \supset [a_n\,,b_n] \supset \cdots.$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n\,,b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n\,,b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a\,,b]$). Montrons que $f(c) = \lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi $f(c) = \lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$ $\square$

Remarques 1.2.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = \lambda$ ($f(a) < \lambda < f(b)$) admet au moins une solution dans $[a\,,b]$.
2. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$...

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

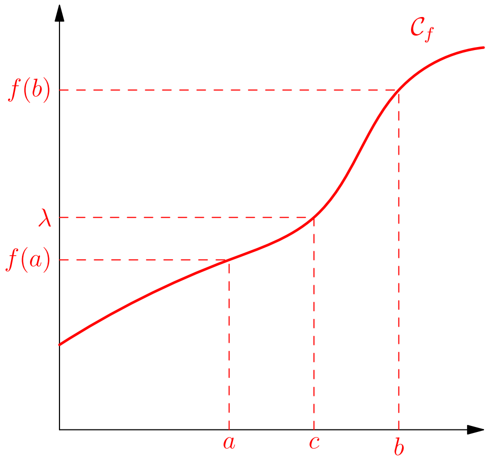


FIGURE 1 – Cas d'une fonction monotone

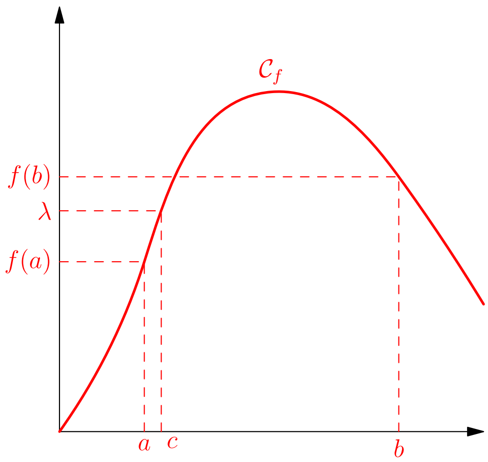


FIGURE 2 – Cas d'une fonction non monotone

Exemple 1.3. Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \left]a\,,b\right[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 1.4. Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_0 \in [-1\,,1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

- Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\,,b]$).
- Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1\,,1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geq \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\,,b]$.
- On raisonne de même si on a un intervalle $[a\,,0]$ ou $[a\,,b]$ lorsqu'il contient 0.

2 Applications

2.1 Le théorème du point fixe

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe.

THÉORÈME 2.1 (THÉORÈME DU POINT FIXE). Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,,b]$. Si $f(I) \subset I$ alors f admet (au moins) un point fixe sur I. Autrement dit, il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.1.* Considérons la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \in g(I).$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est-à-dire $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. $\square$

2.2 Image d'un intervalle par une application continue

Corollaire 2.2 (Image d'un intervalle par une application continue). Soit f une application *continue* sur un intervalle I. Alors[a] $f(I)$ est un intervalle.

a. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$.

$\Diamond$ *Démonstration du corollaire 2.2.* Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leq y_2$. Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1\,, y_2]$ est élément de $f(I)$. Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que :

$$f(a) = y_1 \quad \text{et} \quad f(b) = y_2.$$

Comme I est un intervalle, on a : $[a\,, b] \subset I$. Comme f est continue sur $[a\,, b]$ (puisque $[a\,, b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in [y_1\,, y_2]$, il existe $c \in [a\,, b]$ tel que $f(c) = \lambda$. D'où : $\lambda \in f(I)$. $\square$

Remarque 2.3. Si f n'est pas continue, il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle : avec $f(x) = \mathrm{E}\,(x)$, $\mathrm{E}\,(x)$ désigant la partie entière de x, on a $f([0\,, 1]) = [0\,, 1]$.

Exemples 2.4.

1. Soit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   — Image de l'intervalle ouvert $I =]1\,, 2[$: $f(I) =]1\,, 4[$.
   — Image de l'intervalle ouvert $J =]-1\,, 2[$: $f(J) = [0\,, 4[$.
   — Image de l'intervalle fermé $H = [-2\,, 2]$: $f(H) = [0\,, 4]$.
   — Image de l'intervalle semi-ouvert $K = [0\,, +\infty[$, $f(K) = K$.
2. Soit $g(x) = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   — Image de l'intervalle ouvert $I =]0\,, \pi[$, $g(I) =]0\,, 1]$.
   — Image de l'intervalle ouvert $J =]0\,, 2\pi[$: $g(J) = [-1\,, 1]$.
3. Soit $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut déterminer $h(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -h(x),$$

ce qui prouve que h est impaire. Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Supposons $0 \leq x < y$. Alors :

$$h(y) - h(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}.$$

Or, $y - x > 0$ d'où :

$$h(x) - h(y) > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(y).$$

Ceci prouve la stricte croissance de h dans $\mathbb{R}_+$. Comme h est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

et, h étant impaire :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1.$$

Montrons que h est bornée par -1 et 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que $0 \leq x \leq 1 + x$. Comme $1 + x \geq 0$, on peut diviser par $1 + x$:

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$$

et comme $x = |x|$ (puisque $x \geq 0$) :

$$0 \leq h(x) \leq 1.$$

Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq h(x) \leq 1.$$

Donc h est bornée par -1 et 1 (mais elle n'atteint pas ses bornes). On a donc $h(\mathbb{R}) \in]-1\,, 1[$. Réciproquement soit $y \in]-1\,, 1[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = y$. Donc $]-1\,, 1[\subset h(\mathbb{R})$. D'où :

$$h(\mathbb{R}) =]-1\,, 1[.$$

2.3 Image d'un segment par une application continue

La démonstration est hors programme, on pourra admettre le théorème lors de la présentation du plan.

THÉORÈME 2.5 (IMAGE D'UN SEGMENT PAR UNE APPLICATION CONTINUE). Soit f une application continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un segment.

Pour démontrer le théorème 2.5, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.6. Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a\,,b]$. Si f est continue sur $[a\,,b]$, f est bornée sur $[a\,,b]$.

$\Diamond$ *Démonstration du lemme 2.6.* On suppose que f est non bornée et on reprend la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que c est la limite commune des suites (a_n) et (b_n) construite dans cette démonstration. Or f est non bornée sur $[a_n\,,b_n]$, on peut donc construire une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $c_n \in [a_n\,,b_n]$ et $|f(c_n)| \geq n$. La première relation nous montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose f continue sur $[a\,,b]$. $\square$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.5.* Soit $[a\,,b]$ un segment de I. D'après le lemme précédent, il existe deux réels m et M tel que $f([a\,,b])$ soit l'un des intervalles $]m\,,M[$, $[m\,,M[$, $]m\,,M]$, $[m\,,M]$, On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)-m} \quad \text{ou} \quad x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$$

dont on observera qu'elles sont définies et continues sur $[a\,,b]$ sans y être bornées. $\square$

2.4 Théorème de bijection

Le théorème de bijection est une particularisation du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute une condition de plus pour la fonction f : la stricte monotonie.

THÉORÈME 2.7 (THÉORÈME DE BIJECTION). Soit f une application *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I. Soient a et b dans I avec $a < b$. Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un *unique* c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.7.* **Existence** L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité L'unicité découle de la stricte monotonie. On va la démontrer dans le cas où f est strictement croissante (le cas strictement décroissante) est analogue. Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans $[a\,,b]$ tels que $f(c) = \lambda$ et $f(c') = \lambda$. Si $c < c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) < f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Si $c > c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) > f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Finalement $c = c'$, ce qui prouve l'unicité. $\square$

Remarque 2.8. En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

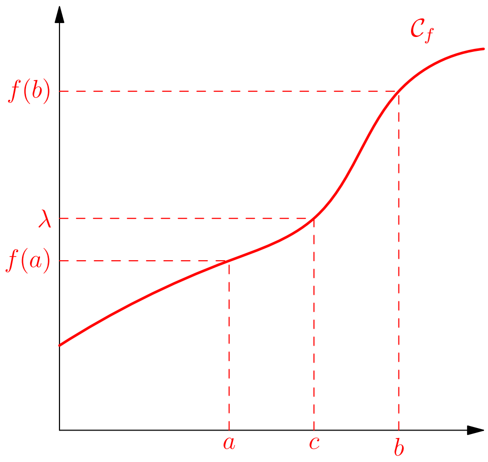


FIGURE 3 – Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Dans le cas où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, on a donc moyen de déterminer l'image d'un intervalle $[a\,,b]$:

— $f([a\,,b]) = [f(a)\,,f(b)]$ lorsque f est strictement croissante ;

— $f([a\,,b]) = [f(b)\,,f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de f par ses limites.

Corollaire 2.9. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

◊ *Démonstration du corollaire 2.9.* Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection. □

Exemple 2.10. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x.$$

On démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$. La fonction g est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus :

$$g(-1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1 > 0.$$

Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On donne maintenant un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$g(x)$	$-0,899$	$-0,792$	$-0,673$	$-0,536$	$-0,375$	$-0,184$	$0,043$	$0,312$	$0,629$

On en déduit :

$$-0,4 < \alpha < -0,3.$$