

# Limite d'une fonction réelle de variable réelle.

---

Clément BOULONNE

Session 2020

## Préambule

### Niveau de la leçon

Classes de première et terminale

### Prérequis

Fonctions

### Références

- G. COSTANTINI, *Les limites*. Première S. URL : <http://bacamaths.net>.
- X. DELAHAYE, *Limites, Terminale S*. URL : <http://xmaths.free.fr/TS/cours/cours.php?nomcours=TSlimfcours&page=01>

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Définitions</b>	<b>2</b>
2.1	Limite d'une fonction en $+\infty$	2
2.2	Limite d'une fonction en $-\infty$	5
2.3	Limite d'une fonction en un réel $a$	5
2.4	Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)	6
<b>3</b>	<b>Opérations sur les limites</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Asymptotes</b>	<b>9</b>
4.1	Asymptote horizontale	9
4.2	Asymptote verticale	9
<b>5</b>	<b>Théorème de comparaison</b>	<b>10</b>
5.1	Théorème de majoration, minoration	10
5.2	Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »	10

# 1 Introduction

**Exemple 1.1.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x - 1}.$$

1. Si on calcule les valeurs de  $f$  quand  $x$  deviennent très grand, on obtient :

$x$	2	5	10	50	100	1000	10000
$f(x)$	2	2,75	2,88889	2,97959	2,98989	2,99899	2,99989

On constate que lorsque les nombres  $x$  devient de plus en plus grands, les nombres  $f(x)$  s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. On dire que la limite  $f$  en  $+\infty$  est égale à 3.

2. Si on calcule maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable  $x$  s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

$x$	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	$\times$	-9997	-997	-97	-7	-2	1	2

On dira alors que  $f$  n'a pas de limite ou mieux :

— la limite de  $f$  en 1 à gauche est égale à  $+\infty$

— la limite de  $f$  en 1 à droite est égale à  $-\infty$ .

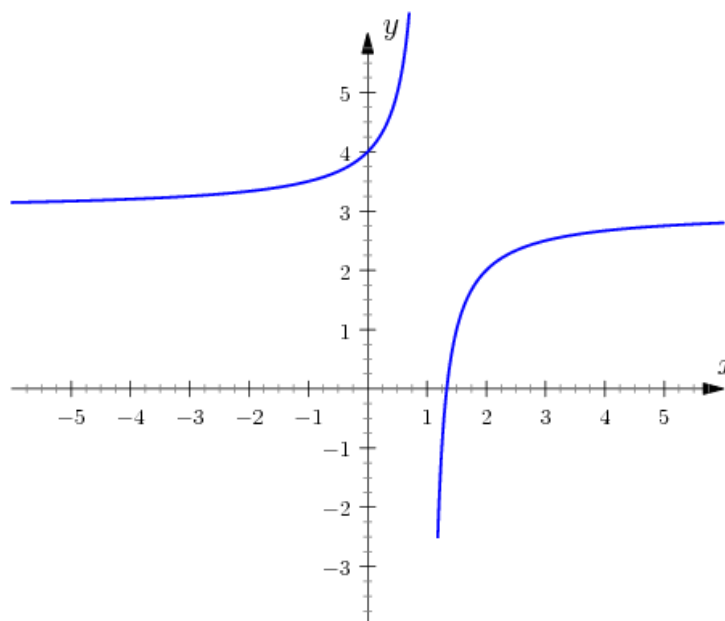


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$

## 2 Définitions

### 2.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

On donne tout d'abord des définitions intuitives de la limite :

**Définition 2.1.** Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres  $f(x)$  deviennent de plus en plus :

**grands** <sup>a</sup>, on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

**grands en valeurs absolue mais négatifs** on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

**proches d'un réel  $\ell$**  <sup>b</sup>, on dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

a. Par l'expression « de plus en plus grand », il faut entendre « aussi grand que voulu ».

b. Par l'expression « de plus en plus proche », il faut entendre « aussi proche que voulu ».

On donne maintenant des définitions plus rigoureuses bien qu'elle ne soit pas utilisé en classe de Première S.

**Définition 2.2.** 1. Si pour tout réel  $M$  positif, il existe un réel  $A$  tel que :

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M,$$

alors on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Si pour tout réel  $M$  négatif, il existe un réel  $A$  tel que :

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$$

alors on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. S'il existe un réel  $\ell$  tel que pour tout intervalle  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ , ( $\varepsilon > 0$ ) et il existe un réel  $A$  tel que :

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \in I.$$

Alors on dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

**Exemples 2.3.** 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$ ,

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ,

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ,

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ,

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = -\infty$ ,

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ,

8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{x^2}{2}) = -\infty$ .

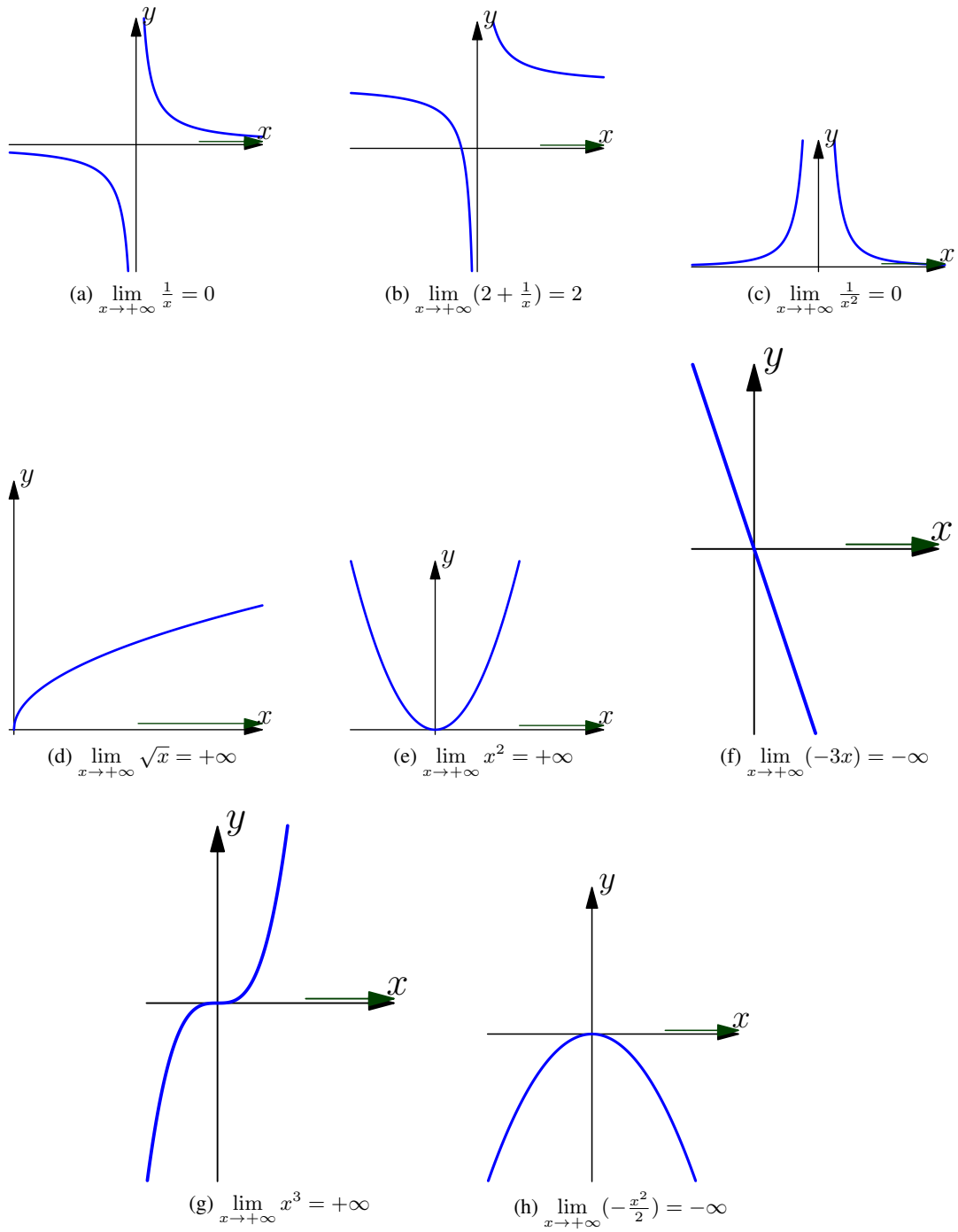


FIGURE 2 – Limite d'une fonction en  $+\infty$

*Remarque 2.4.* Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en  $+\infty$ , c'est le cas, par exemple, pour la fonction sinus et cosinus.

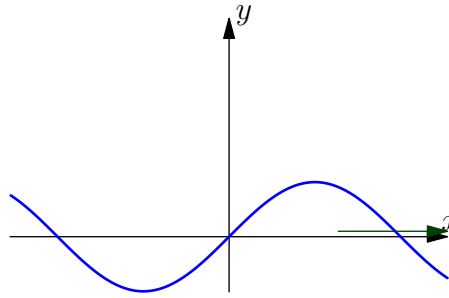


FIGURE 3 – La fonction sinus n'a pas de limite en  $+\infty$

## 2.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

**Définition 2.5.** Soit  $f$  une fonction définie au moins sur un intervalle du type  $]-\infty, a[$ . Lorsque  $-x$  prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres  $f(x)$  deviennent de plus en plus

**grands**, on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**proches d'un réel  $\ell$** , on dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $-\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

**grands en valeurs absolue mais négatifs**, on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Exemples 2.6.** 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ ,

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$ ,

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .

## 2.3 Limite d'une fonction en un réel $a$

**Définition 2.7.** Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D$  contenant  $a$  ou tel que  $a$  soit une borne de  $D$ . Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$ , si les nombres  $f(x)$  deviennent de plus en plus

**grands**, on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

**proches d'un réel  $\ell$** , on dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

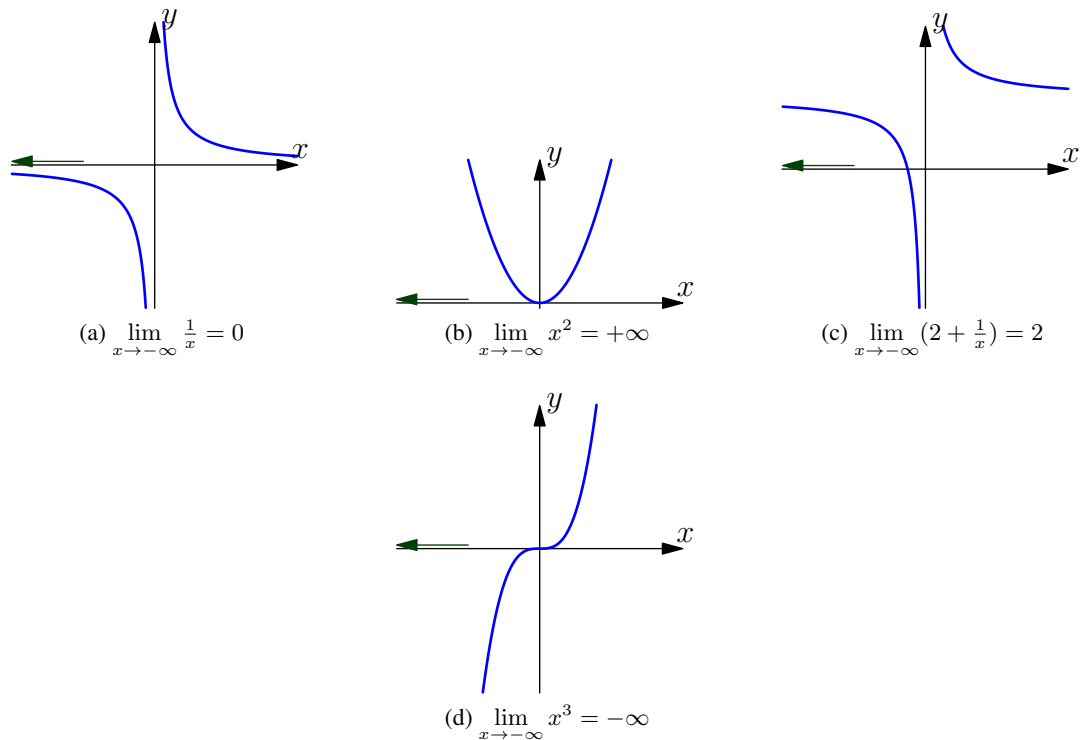


FIGURE 4 – Limite d'une fonction en  $-\infty$

**grands en valeur absolue mais négatifs**, on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $a$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

**Exemples 2.8.** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ ,

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x) = -6$ .

*Remarque 2.9.* Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en  $a$ ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0.

## 2.4 Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si  $x$  s'approche de 0, les nombres  $\frac{1}{x}$  ne rentrent pas dans le cadre de la définition 2.7. Cependant, on peut parler de limite « à droite » et de limite « à gauche » : on note alors  $0^+$  pour signifier que  $x$  s'approche de 0 par valeur supérieure et  $0^-$  pour signifier que  $x$  s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

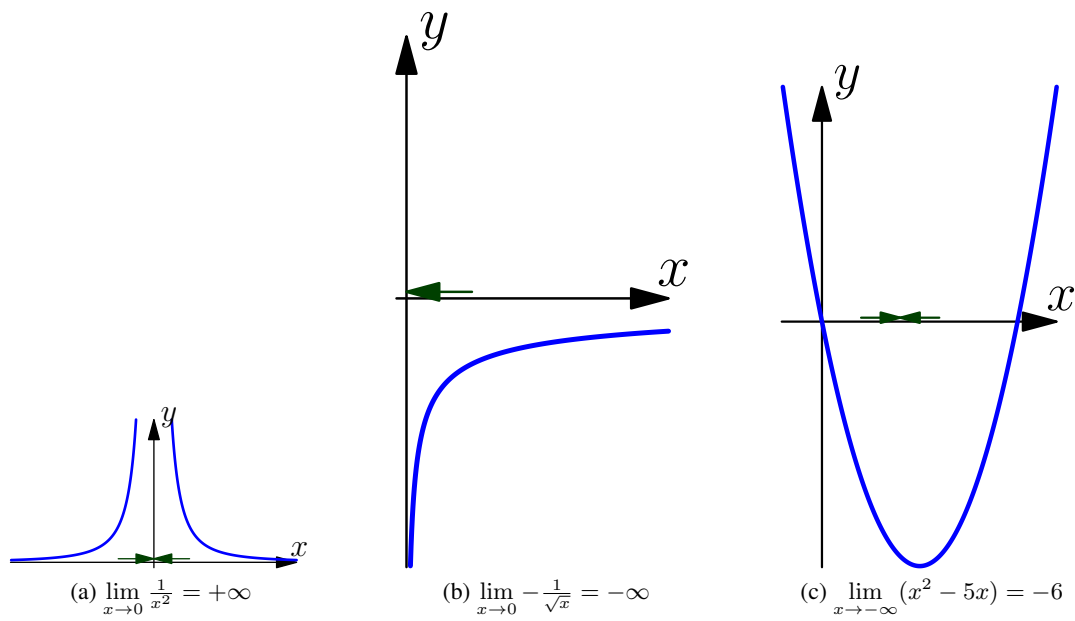


FIGURE 5 – Limite d'une fonction en un point  $a$

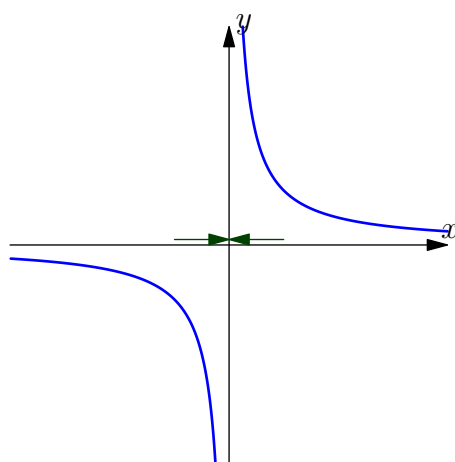


FIGURE 6 – Limite à gauche et à droite

### 3 Opérations sur les limites

**PROPRIÉTÉ 3.1.** Les tableaux 1, 2 et 3 permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions  $f$  et  $g$ , ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction  $f$  lorsqu'on connaît la limite de deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en  $+\infty$ , en  $-\infty$ , en  $x_0$ , des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de même nature.

Si $f$ a pour limite	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g$ a pour limite	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

TABLE 1 – Limite d'une somme

Si $f$ a pour limite	$\ell$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$
Si $g$ a pour limite	$\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (suivant les signes)	forme ind.

TABLE 2 – Limite d'un produit

Si $f$ a pour limite	$\ell' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

TABLE 3 – Limite d'un inverse

**Remarques 3.2.** 1. Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.  
2. Les formes indéterminées sont de deux types exprimés sous forme abrégée par :  $+\infty - \infty$ ,  $0 \times +\infty$ .

**Exemples 3.3.** 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 15) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 15) = +\infty$ .  
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x(x + 3)) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty$ .  
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-2} = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$ .

**PROPRIÉTÉ 3.4.** — La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son terme de plus haut degré.  
— La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemples 3.5.** 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$ .  
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ .



## 4 Asymptotes

### 4.1 Asymptote horizontale

**Définition 4.1 (Asymptote horizontale).** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ ) on dit que la droite d'équation  $y = k$  est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ ).

**Exemple 4.2.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$ , donc la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 2$  en  $+\infty$ .

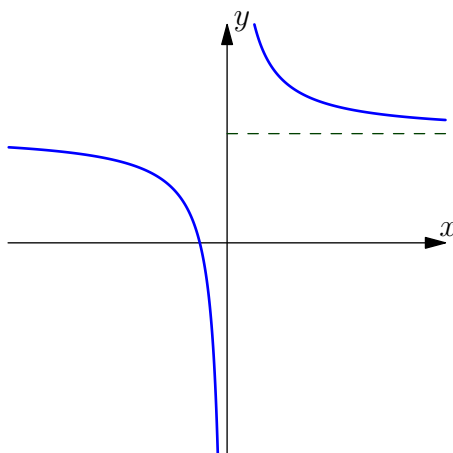


FIGURE 7 – La courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$  admet une tangente horizontale d'équation  $y = 2$  en  $+\infty$

### 4.2 Asymptote verticale

**Définition 4.3 (Asymptote verticale).** Si une fonction  $f$  admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel  $a$ , on dit que la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exemple 4.4.**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$  (et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ ) donc la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 2$ .

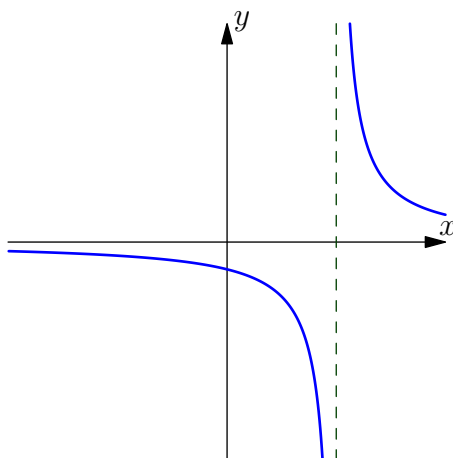


FIGURE 8 – La courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$  admet une tangente verticale d'équation  $x = 2$

## 5 Théorème de comparaison

### 5.1 Théorème de majoration, minoration

**THÉORÈME 5.1.** Soit  $f$ ,  $u$  et  $v$  des fonctions définies sur un intervalle du type  $[a, +\infty[$ .

- Si, pour  $x$  assez grand, on a  $f(x) \geq u(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Si, pour  $x$  assez grand, on a  $f(x) \leq v(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en  $-\infty$  et en  $a$ .

**Exemples 5.2.** 1. Soit  $f(x) = -x + \sin(x)$ . On calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . On pose  $v(x) = -x + 1$ . Comme, pour tout  $x$ ,  $\sin x \leq 1$ , on a, pour tout  $x$ ,  $f(x) \leq v(x)$ . Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Soit  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ . On pose  $u(x) = \frac{1}{x^2}$ . Comme, pour tout  $x$ , on a  $1 \leq \sqrt{1+x^2}$ , on a, pour tout  $x$ ,  $g(x) \geq u(x)$ . Or,

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$$

, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

### 5.2 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

**THÉORÈME 5.3.** Soient  $f$ ,  $u$  et  $v$  des fonctions définies sur un intervalle du type  $[a, +\infty[$ . Si, pour  $x$  assez grand, on a  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

*Démonstration.*  $\diamond$  Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Pour tout intervalle ouvert  $U$  contenant  $\ell$  :

- Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , il existe un voisinage  $V_1$  de  $a$  tel que pour tout  $x$  de  $V_1$ ,  $f(x) \in U$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ , il existe un voisinage  $V_2$  de  $a$  tel que pour tout  $x$  de  $V_2$ ,  $h(x) \in U$ .
- Enfin, d'après la propriété d'encadrement, il existe un voisinage  $V_3$  de  $a$  tel que, pour tout  $x$  de  $V_3$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

L'intersection de trois voisinages est un voisinage donc  $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$  est un voisinage de  $a$  et pour tout  $a$  de  $V$ , on a :

$$\begin{cases} f(x) \in U \\ h(x) \in U \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

d'où il vient que pour tout voisinage  $U$  contenant  $\ell$ , il existe un voisinage  $V$  tel que  $x \in V$  implique  $g(x) \in U$ . Ce qui prouve que :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

□

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en  $-\infty$  et en  $a$ .

**Exemples 5.4.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On veut calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . On pose :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme, pour tout  $x \neq 0$ , on a :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

on en déduit que, pour tout  $x \neq 0$  :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$