LEÇON N° 27

Différents types de raisonnement en mathmatiques

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Vocabulaire de la logique : assertion, implication, équivalence, quantificateurs, négation

Références

— M.-C. DAVID & B. PERRIN-RIOU, *Raisonnements*. URL : `http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=B0151B82A7.4&+lang=fr&+module=U1%2Flogic%2Fdoclogic.fr`.
— A. BODIN & al., *Exo7, Logique et raisonnements*. Exo7, URL : `http://exo7.emath.fr/cours/ch_logique.pdf`.
— C. BOULONNE, *Notes de cours, M101 : Fondements de l'algèbre*. L1 Mathématiques, 2006-2007.
— D. RENÉ & al., *Les démonstrations mathématiques - Cours complet avec 127 exercices résolus*. Références sciences, Ellipses, 2017.

Table des matières

1 Introduction

La place de la logique et du raisonnement est très importante dans les programmes du secondaire. En effet, l'étude des formes diverses de raisonnement et la nécessité de distinguer implication et causalité sont essentielles à la formation mathématique.

Ainsi, les mathématiques vont permettent de distinguer le vrai du faux grâce à la mise en place d'une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour tous : il s'agit du raisonnement. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Reste à savoir quel type de raisonnement il faut mener pour arriver au résultat attendu.

2 Prérequis : logique

Extrait repris du cours « M101 : Fondements de l'algèbre » par C. BOULONNE.
$\Diamond$

2.1 Opérateurs logiques

Définition 2.1 (Proposition). Une *proposition* P est un énoncé mathématique qui peut être vrai (on note V, le fait que la proposition soit vraie) ou faux (on notera F, le fait que la proposition soit fausse).

Exemples 2.2.
1. La proposition $2 > 1$ est vraie.
2. La proposition $\pi \leq 3$ est fausse (pour rappel, π vaut approximativement $3,14156$).
3. La proposition $x^2 > 0$ est vraie si $x \neq 0$ et fausse sinon.

Définition 2.3 (Table de vérité). Une *table de vérité* prend, en entrée les résultats des divers propositions et en sortie, les résultats des opérations logiques faites entre ces propositions.

Définition 2.4 (et). Soient P et Q deux propositions. On dit que « P et Q » est une proposition vraie si et seulement si la proposition P est vraie et, en même temps, la proposition Q est vraie. On notera la proposition « P et Q », $P \wedge Q$.

La table 1 représente la table de vérité du connecteur logique « et ».

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 1 – Table de vérité du connecteur logique « et »

Définition 2.5 (ou). Soient P et Q deux propositions, on dit que « P ou Q » est une proposition vraie si et seulement si l'une des deux propositions est vraie. On notera la proposition « P ou Q », $P \vee Q$.

La table 2 représente la table de vérité du connecteur logique « ou ».

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 2 – Table de vérité du connecteur logique « ou »

Exemple 2.6. Soient les propositions suivantes :

$$4^2 > 12 \tag{P}$$

$$\sqrt{2} > 2 \tag{Q}$$

La proposition P est vraie car $4^2 = 16$ mais, par contre, la proposition Q est fausse car $\sqrt{2}$ vaut approximativement $1,41$. D'où $P \wedge Q$ est une proposition fausse et $P \vee Q$ est une proposition vraie.

Définition 2.7 (Négation). On appelle *négation* d'une proposition P, le contraire de P. on note non P ou $\neg P$, la négation de P.

Exemple 2.8. Soit la proposition suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \tag{P}$$

Cette proposition est vraie, sa négation est :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \tag{Q}$$

qui est, évidemment, fausse.

Définition 2.9 (Implication). Soient P et Q deux propositions. On dit que P implique Q ($P \Rightarrow Q$) si la proposition « $\neg P \vee Q$ » est vraie.

Remarque 2.10. **Attention !** Si la proposition P est fausse alors l'implication est vraie.

La table 3 nous donne la table de vérité de l'implication entre deux propositions.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 3 – Table de vérité du connecteur logique « si... alors »

Définition 2.11 (Hypothèse et conclusion). Dans la définition 2.9, on dit que P est l'*hypothèse* dans l'implication et Q est la *conclusion*.

Exemples 2.12.

1. « Si $x \neq 0$ alors $x^2 > 0$ » est un énoncé vrai.
2. « Si $x > 0$ alors $x^3 > 0$ est un énoncé vrai.
3. « $1 \leq 0 \Rightarrow 2 < 1$ » est aussi un énoncé vrai car l'hypothèse « $1 < 0$ » est fausse.

Définition 2.13 (Équivalence). Soient P et Q deux propositions. On dit que P et Q sont *logiquement équivalent* si P et Q ont simultanément même valeur de vérité (c'est-à-dire « vrai » ou « faux » en même temps).

La table 4 nous donne la table de vérité de la relation « si et seulement si ».

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 4 – Table de vérité du connecteur logique « si et seulement si »

Exemple 2.14. La proposition « $x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0$ » est vraie.

PROPOSITION 2.15 (LOI DE NON-CONTRADICTION). Soit P une proposition. Alors $P \wedge \neg P$ est fausse.

PROPOSITION 2.16 (LOI DU TIERS EXCLU). Soit P une proposition. Alors $P \vee \neg P$ est vraie.

PROPOSITION 2.17. Soient P et Q deux propositions. On a alors :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Exemple 2.18. Pour montrer le proposition « $x > 0$ si et seulement si $x^3 > 0$ », il faut montrer que « $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$ » et « $x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$.

PROPOSITION 2.19 (TRANSITIVITÉ). Soient P et Q deux propositions. Si la proposition « $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ ˇ est vraie alors la proposition « $P \Rightarrow R$ » est vraie.

PROPOSITION 2.20 (RÈGLE D'INFÉRENCE). Soient P et Q deux propositions. Si la proposition « $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ » est vraie alors Q est vraie.

PROPOSITION 2.21 (DOUBLE NÉGATION). Soit P une proposition. On a le résultat suivant :

$$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P.$$

On peut vérifier les règles logiques définies dans les propositions 2.15, 2.16, 2.17, 2.19, 2.20 et 2.21 à l'aide d'une table de vérité.

2.2 Quantificateurs

Définition 2.22 (Ensemble). Un *ensemble* est une collection d'objets. Ces objets s'appellent les *éléments* de l'ensemble.

Définition 2.23 (Appartenance). Si E est un ensemble et x un élément de E alors on dit que x *appartient* à E et on note $x \in E$.

Remarque 2.24. On note $x \notin E$ si x n'appartient pas à E. C'est la négation de la proposition de l'appartenance à un ensemble ($\neg(x \in E)$).

Exemple 2.25. On définit les ensembles de nombres suivants :

— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

— $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{2}{3}, 1, \frac{9}{19}, \ldots\right\}.$$

— $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels :

$$\mathbb{R} = \left\{-\sqrt{2}, 0, 2, \pi, \ldots\right\}.$$

— $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

Exemple 2.26 (Appartenance).. L'élément 17 appartient à $\mathbb{N}$ car $17 \geq 0$. On peut ainsi écrire $17 \in \mathbb{N}$ et dire aussi que 17 appartient à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Par contre, -17 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ car $-17 \neq\geq 0$ mais il appartient à $\mathbb{Z}$.

$\frac{3}{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ mais il appartient à $\mathbb{Q}$.

Définition 2.27 (Quantificateur universel). Soient E un ensemble et P une proposition. La proposition « $\forall x \in E, P$ » veut dire que *tout élément* de E vérifie la proposition P.

Exemple 2.28. La proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$ » est vraie (c'est la définition de l'ensemble $\mathbb{N}$).

Définition 2.29 (Quantificateur existenciel). Soient E un ensemble et P une proposition. La proposition « $\exists x \in E, P$ » veut dire qu'*il existe* un élément x de E qui vérifie P.

Exemple 2.30. La proposition « $\exists x \in \mathbb{Z}, x < 0$ est vraie. Sa traduction en langue française est : « il existe un x qui appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$ tel que x est strictement négatif. »

Remarque 2.31. Il faut faire attention dans quel ordre on écrit les quantificateurs. La proposition :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \quad y > x$$

est vraie (on peut prendre $y = x + 1$) mais, par contre, la proposition

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \quad y < x$$

est fausse (on peut prendre $y = x$).

PROPOSITION 2.32 (NÉGATION DES QUANTIFICATEURS).

1. La négation du quantificateur universel est un quantificateur existenciel (c'est-à-dire que « $\neg\forall$ » correspond à un « $\exists$).
2. La négation du quantificateur existenciel est un quantificateur universel (c'est-à-dire que « $\neg\exists$ » correspond à un « $\forall$ »).

Exemples 2.33.

1. $\neg(\forall x \in E,\ P) \Leftrightarrow \exists x \in E,\ \neg P$;
2. $\neg(\exists x \in E,\ P) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \neg P$.

3 Raisonnement direct

Définition 3.1 (Raisonnement direct). On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on veut montrer qu'alors Q est vraie. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée.

Remarque 3.2. Dans le cas où P est fausse alors l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelque soit la valeur de vérité de Q.

Exemples 3.3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

$\Diamond$ *Résolutions.*

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisqu'un produit, une somme et une différence d'entiers naturels relatifs sont des entiers relatifs, on en déduit que $16n^2 - 48n + 33$ est un entier relatif.
   D'autre part, on a l'égalité :
   $$16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3.$$
   Puisque, $n \in \mathbb{Z}$, $2n - 3 \in \mathbb{Z}^*$ et donc $|2n-3| \geq 1$. D'où $(2n-3)^2 \geq 1$. Il s'ensuit que l'on a
   $$4(2n-3)^2 - 3 \geq 4 - 3 = 1.$$
   Donc : $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$. On a ainsi démontré que pour tout entier relatif n, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. a et b s'écrivent :
   $$a = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad b = \frac{p'}{q'}\ (p, p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q, q' \in \mathbb{N}^*)$$
   Maintenant :
   $$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$
   Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élement de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élement de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

$\square$

4 Raisonnement par disjonction des cas (ou cas par cas)

Définition 4.1 (Raisonnement par disjonction des cas). Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E puis pour tous les x n'appartenant pas à A. C'est la *méthode de disjonction* ou du cas par cas.

Remarque 4.2. Finalement, on partitionne E en $E = A \cup E \setminus A$.

Exemples 4.3.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

$\Diamond$ *Résolutions.* 1.

1er cas a **ou** b est multiple de 3. Si $3 \mid a$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$ et si $3 \mid b$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$. Dans ce premier cas, l'assertion est vraie.

2e cas a **et** b ne sont pas multiples de 3. Tout entier naturel s'écrit sous la forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$. Comme a et b ne sont pas multiples de 3, ils s'écrivent sous la forme $3k+1$ ou $3k-1$ (qui revient à la forme $3k+2$).

On peut alors montrer, en distinguant les cas, que $a^2 - b^2$ est divisible par 3.

— Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$:

$$a^2 - b^2 = (3k+1)^2 - (3k'+1)^2 = 9(k^2 - k'^2) + 6(k - k') = 3(3(k^2 - k'^2) + 2(k - k')).$$

Donc $3 \mid a^2 - b^2$ et par suite, $3 \mid ab(a^2 - b^2)$.

— Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \ldots$

— Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \ldots$

— Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \ldots$

2.

1er cas $x \leq y$. Comme $x \leq y$, $x - y \leq 0$ et donc $|x - y| = -(x - y)$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = y$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

2e cas $x > y$. Comme $x > y$, $x - y > 0$ et donc $|x - y| = x - y$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + (x - y)) = x,$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

On conclut finalement que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Remarque 4.4. On aurait pu prouver de la même manière que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

$\square$

5 Raisonnement par contraposition

Définition 5.1 (Raisonnement par contraposition). Le *raisonnement par contraposition* permet de démontrer qu'une implication de type $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante :

l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemples 5.2. 1. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.

2. Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$(\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) \Rightarrow (\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid a_k) \vee (\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \mid b_i).$$

$\diamondsuit$ *Résolutions.* 1. Prenons l'énoncé contraposé : $(a \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon)$. Ceci est immédiat. En effet, si on a $a \neq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| > \frac{|a|}{2} = \varepsilon$.

2. Procédons par contraposée, ce qui donne à démontrer :

$$(\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid a_k) \wedge (\exists i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \nmid b_i) \Rightarrow (\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}).$$

Si p ne divise pas tous les a_k, soit r le premier indice tel que p ne divise pas a_r (donc p divise tous les précédents). De même, soit s le premier indice tel que p ne divise pas b_s. Alors p ne divise pas $a_0 b_{r+s} + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_{r+s} b_0$ puisqu'il divise tous ces termes sauf $a_r b_s$. On utilise la propriété qui nous dit qu'un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un de ses facteurs. On a donc trouvé $k = r + s$ tel que p ne divise pas $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

□

6 Raisonnement par l'absurde

Définition 6.1 (Raisonnement par l'absurde). Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi, si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemples 6.2. 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f garde un signe constant strict sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0\,,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

$\diamondsuit$ *Résolutions.* 1. On veut prouver « f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ **ou** f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ ». Supposons que ce résultat soit faux. On suppose donc :

$$(\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) \leq 0) \quad \text{et} \quad (\exists b \in \mathbb{R},\ f(b) \geq 0).$$

Mais comme on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on est certain que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (et par conséquence $a \neq b$.

Ainsi f est continue sur le segment d'extrémités a et b et $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer l'existence d'un réel c tel que $f(c) = 0$.

Ce qui est absurde car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par un raisonnement par l'absurde, on a montré que si f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f garde un signe constant.

2. On veut montrer qu'il existe i tel que $1 \leq i \leq n$ et $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$. Supposons que ce résultat soit faux, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

On a :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Ce qui est absurde car la longueur de l'intervalle ne peut excéder 1. La propriété initiale est donc vraie.

□

Remarque 6.3. Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde.

7 Raisonnement par utilisation d'un contre-exemple

Définition 7.1 (Contre-exemple). Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.

Par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ ».

Exemples 7.2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ($f \geq 0$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$) alors f est identiquement nulle sur $[0\,,1]$.
2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites qui n'admettent pas de limite alors la suite $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite.

$\Diamond$ *Solution.*

1. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]0\,,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a bien $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

2. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = (-1)^n$. Ces deux suites n'admettent pas de limites. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_nv_n = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1.$$

Donc, la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et elle a pour limite 1.

$\square$

8 Raisonnement par récurrence

Définition 8.1 (Principe de récurrence). Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$ est vraie.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 8.2.

1. Le principe de récurrence est basé sur la construction de $\mathbb{N}$. En effet, un des axiomes pour définir $\mathbb{N}$ est le suivant : « Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$, on a : $A = \mathbb{N}$.
2. La récurrence présentée ci-dessus est une récurrence dite simple mais il existe aussi des récurrences doubles, triples, etc. . ..

   Dans ce cas, par exemple pour une récurrence triple, les trois étapes deviennent :

   Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

   Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 3$ donné avec $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$ vraies et on démontre que l'assertion $P(n)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence triple, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsqu'on ne sait pas à l'avance combien de rangs il faut supposer vrais avant d'en déduire l'hérédité, on utilise le principe de récurrence forte. Dans l'étape 2 d'hérédité, on fixe $n \geq 0$ et on suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie. Dans la conclusion, on invoque le principe de récurrence forte.

Exemples 8.3. 1. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ \\ S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions polynômes définie par :

$$\begin{cases} f_0(x) = 2 \\ f_1(x) = x \\ f_{n+2}(x) = x f_{n+1}(x) - f_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

♢ *Résolutions.* 1. On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

Initialisation $S_0 = 1 \leq 0! = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité Fixons $n \geq 0$. On suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k!$$

car, pour tout $0 \leq k \leq n$, $S_n \leq k!$, d'après l'hyp. de récurrence. D'où :

$$S_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Or, $0 \leq k \leq n$, $(n-k)! \geq 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Il vient alors :

$$S_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = n! \times n = (n+1).$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par le principe de récurrence forte sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En exercice ! (utiliser la récurrence double)

□

9 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 9.1 (Raisonnement par analyse-synthèse). Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de cele-ci (forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé). On raisonne par *analyse-synthèse*.

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution et on essaie d'en tirer le maximum de renseignement la concernant. Cette étape assure parfois *l'unicité*.

Synthèse : On reporte dans le problème la ou les solutions trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution au problème, puis une unique ou plusieurs. Cette étape assure *l'existence*.

Exemples 9.2.

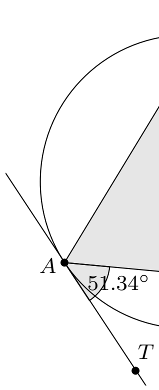
1. Montrer que toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une seule façon sous la forme $f = p + i$, où p est une fonction paire et i est une fonction impaire.
2. Recherche de lieu géométrique, par double inclusion.

THÉORÈME 9.3 (ARC CAPABLE). Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ fixés et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$E_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P},\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}.$$

(a) Si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ alors $E_0 = (AB) \setminus \{A, B\}$.

(b) Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ alors E_θ est le cercle passant par A et B, privé des points A et B, tagent à la droite (AT) en A où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$.



Démonstration. ◊

1. **Analyse :** Supposons qu'il existe une fonction p paire et i impaire telles que $f = p + i$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

Comme p est paire et i est impaire, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

On a donc :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}.$$

Par somme, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par différence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour l'instant, nous avons juste prouvé que si f se décompose sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire alors nécessairement p et i sont définies à partir de f comme précédemment. Elles sont donc uniques mais leur existence n'est pas encore démontrée.

Synthèse : Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définissons à partir de f deux fonctions p et i par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que c'est bien une solution du problème posé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x),$$

p est donc bien une fonction paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x),$$

i est donc bien une fonction impaire. Ceci prouve qu'on a bien l'existence d'une solution et exactement d'une seule solution d'après la partie synthèse.

Conclusion : Par analyse-synthèse, on a démontré que pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique couple (p, i) tel que $f = p + i$ avec p est une fonction paire et i est une fonction impaire.

2. (a) immédiat

   (b)

   Analyse : Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \equiv \theta \pmod{\pi}$. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit (intersection des médiatrices) au triangle MAB. On a, d'après le théorème de l'angle au centre :

   $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\theta \pmod{2\pi}.$$

   Dans le triangle ABO, on a :

   $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

   Comme ABO est un triangle isocèle, on a que :

   $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

   Autrement dit, la tangente au cercle en A fait un angle θ avec (AB). Donc M appartient au cercle passant par A et B de centre O, tangent à la droite (AT) en A, où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$. D'où $E_\theta \subset \mathcal{C} \setminus A, B$.

   Synthèse : Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. On note $\theta' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. D'après ce qui précède,

   $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta' \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

   D'où $\theta = \theta'$ et $M \in E_\theta$. Ainsi, $\mathcal{C} \setminus \{A, B\} \setminus E_\theta$.

   Finalement, $E_\theta = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

□

10 Propositions de questions posées par le Jury

1. On estime à 1100000 le nombre d'habitants dans la métropole lilloise. On suppose que personne ne possède plus de 800000 cheveux sur sa tête. Que peut-on affirmer ?
2. Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On pourra supposer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et définir l'ensemble $A = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Peut-on calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?
4. Existe-il $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ tel que $\alpha^\beta \in \mathbb{Q}$?
5. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que dans toute boite de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur.

   Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. On considère alors une boite de $(n+1)$ crayons de couleur, que l'on numérote de 1 à $n+1$. En enlenvant le dernier crayon, on obtient une sous-boite qui, par hypothèse de récurrence, ne contient que des crayons de la même couleur. De même en enlevant le premier crayon. Les couleurs des deux sous-boites sont identiques, car il s'agit de la couleur des crayons communs aux deux sous-boites. D'où le résultat.

   Où est l'erreur ?