LEÇON N° 25

Problèmes conduisant à une modélisation par des matrices

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES (Spécialité)

Prérequis

Définition d'une matrice, opérations sur les matrices, fonction dérivée, intégrales, résolution d'un système d'équations, utilisation d'un logiciel de calcul formel.

Références

— E. SIGWARD & al., *Odysée Mathématiques Terminale ES/L*. Hatier, 2012.
— D. ROBERT, *Mathématiques en Terminale ES, Enseignement de spécialité*. 2012-2013. URL : `http://perpendiculaires.free.fr/wp-content/TESspe-2012-2013.pdf`
— INCONNU, *Devoir maison - 5. Chiffrement de Hill*. Lycée Victor Duruy - Mont de Marsan. `\T1\dhttp://mathstsduruy.fr/wp-content/uploads/2013/04/dev5_Sp%C3%A9_maison_2012.pdf`.
— APMEP, *Sujets. Annales du BAC S/ES*. 2017. URL : `http://apmep.fr`.
— S. MONDHER, *Matrices et systèmes*. Alphamaths, Lycée Ahmed Amara.KEF. URL : `htrtp://alphamaths.c4.fr`.

Table des matières

1 Produit matriciel

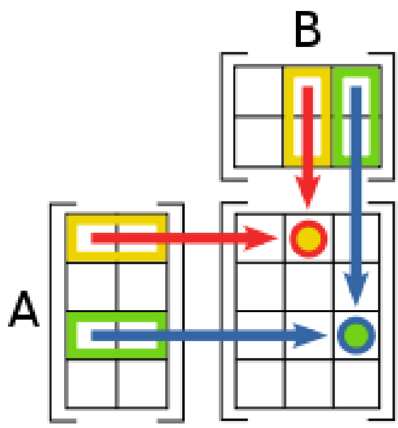
1.1 Produit de deux matrices

Définition 1.1. Soit A une matrice d'ordre $n \times p$ et B une matrice d'ordre $p \times r$: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.

On appelle *produit des matrices A et B* la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r}$ définie coefficient par coefficient par :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

La multiplication de deux matrices se fait selon le schéma suivant :



Remarques 1.2. 1. Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

2. Il peut arriver que le produit $A \times B$ soit réalisable alors que le produit $B \times A$ ne l'est pas (problème de dimensions).
3. Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

PROPRIÉTÉS 1.3. Soient A, B et C trois matrices réelles ; si les opérations indiquées existent, alors on a les égalités :

1. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
2. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
3. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

1.2 Le problème

On réalise le jeu suivant : on lance 4 fois de suite un dé équilibré. On multiple le résultat du premier lancer par 5, celui du deuxième par 10, celui du troisième par 15 et celui du quatrième par 20. Avec les valeurs obtenues, on retranche la deuxième à la première, on ajoute la troisième et on retranche la quatrième pour finir : on obtient le score pour la partie. Si l'on considère plusieurs joueurs, la personne qui obtient le score le plus élevé sur une série de 4 lancers est déclarée gagnante.

1. On prend une partie de 5 joueurs. Construire la matrice des résultats affichés par le dé pour chacun des joueurs. On placera les résultats de chaque série ordonnée de 4 lancers en colonne, par joueur.
2. Déterminer par un calcul matriciel le résultat de chacun des joueurs. Qui a gagné ?
3. Quel est le score minimal possible à ce jeu ? Le score maximal.

$\Diamond$ *Solutions.*

1. On note t_{ij} (pour $1 \leq i \leq 5$ et pour $1 \leq j \leq 4$) le résultat du j^{e} lancer du i^{e} joueur. On aura alors la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{pmatrix}$$

2. Pour obtenir le score de chaque joueur, on multiplie la matrice T par la matrice C de diagonale $(5, 10, 15, 20)$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

La matrice $T \times C$ sera donc de la forme :

$$P = T \times C = \begin{pmatrix} 5t_{11} & 10t_{12} & 15t_{13} & 20t_{14} \\ 5t_{21} & 10t_{22} & 15t_{23} & 20t_{24} \\ 5t_{31} & 10t_{32} & 15t_{33} & 20t_{34} \\ 5t_{41} & 10t_{42} & 15t_{43} & 20t_{44} \\ 5t_{51} & 10t_{52} & 15t_{53} & 20t_{54} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour obtenir le score final de chaque joueur, on multiplie la matrice P par la matrice-colonne (vecteur) V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1) \\ 1 \\ (-1) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$P \times V = \begin{pmatrix} 5t_{11} - 10t_{12} + 15t_{13} - 20t_{14} \\ 5t_{21} - 10t_{22} + 15t_{23} - 20t_{24} \\ 5t_{31} - 10t_{32} + 15t_{33} - 20t_{34} \\ 5t_{41} - 10t_{42} + 15t_{43} - 20t_{44} \\ 5t_{51} - 10t_{52} + 15t_{53} - 20t_{54} \end{pmatrix}.$$

3. Pour obtenir le score minimal de ce jeu, il faut maximiser les deuxième et quatrième lancers et minimiser les premier et troisième lancers.

$$s_{\min} = 5 \times 1 - 10 \times 6 + 15 \times 1 - 20 \times 6 = 5 - 60 + 15 - 120 = -160.$$

Pour obtenir le score maximal de ce jeu, il faut minimiser les deuxième et quatrième lancers et maximiser les premier et troisième lancers.

$$s_{\max} = 5 \times 6 - 10 \times 1 + 15 \times 6 - 20 \times 1 = 30 - 10 + 90 - 20 = 90.$$

□

1.3 Un autre problème de produit matriciel

Exercice 1.4. Un chocolatier fabrique trois sortes de chocolat avec du cacao, du beurre, du lait et du sucre. Le tableau suivant donne les quantités d'unités nécessaires à la fabrication de chaque sorte de chocolat.

	Cacao	Beurre de cacao	Lait	Sucre
Chocolat noir	8	2	0	4
Chocolat au lait	5	3	4	6
Chocolat blanc	0	8	6	5

1. Représenter ces données par une matrice M de dimension 4×3.
2. On reçoit une commande de 5 unités de chocolat noir, 6 unités de chocolat au lait et 9 unités de chocolat blanc.
   (a) Représenter cette commande par une matrice colonne C.
   (b) À l'aide d'un produit matriciel, calculer les quantités nécessaires pour chaque ingrédient.
   (c) Les prix respectifs de chaque ingrédient, en e par unité, sont 1, $0,8$, $0,4$ et $0,3$. En utilisant un produit de matrices convenablement choisies, calculer le prix total pour cette commande.

2 Résolution de systèmes d'équations

2.1 Le problème

Un client achète chez un traiteur deux bouchées à la reine au ris de veau et trois oeufs en gelée pour $18,70$ €. Le client suivant prend une bouchée à la reine au ris de veau et deux oeufs en gelée pour $10,60$ €.

Déterminer le prix d'une bouchée à la reine au riz de veau et d'un oeuf en gelée.

2.2 La théorie

2.2.1 Matrices inversibles

Définition 2.1 (Matrice identité). La matrice I_n de dimension $n \times n$ définie de la manière suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice d'identité* d'ordre n.

Définition 2.2 (Matrice inversible). Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice A est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A \times B = I_n.$$

PROPRIÉTÉ 2.3. Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = I_n$, alors B est unique.

B est appelée *l'inverse de la matrice* A et se note A^{-1}.

Démonstration. $\Diamond$ Supposons qu'il existe B et C carrées d'ordre n telle que $A \times B = A \times C = I_n$. On a a :

$$\begin{aligned} B &= B \times I_n = B \times (A \times C) \\ &= (B \times A) \times C = I_n \times C = C. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Résolution de systèmes

PROPRIÉTÉ 2.4. Tout système d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ est la matrice du système $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour résoudre le sysètme précédent, si la matrice A est inversible, on a :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B.$$

D'après l'associativité du produit matriciel :

$$A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B \Leftrightarrow (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B.$$

Ainsi :

$$I_n \times X = X = A^{-1} \times B.$$

Et finalement : $X = A^{-1} \times B$. On détermine ainsi aisément x et y à l'aide d'un calcul matriciel.

2.2.3 Matrices inversibles 2×2

PROPRIÉTÉ 2.5 (ADMISE). Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice 2×2. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc = 0$. Si tel est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.3 Solution du problème

◊ *Solution.* On cherche :

— x le prix d'une bouchée à la reine

— y le prix d'un œuf en gelée

On doit résoudre le système matriciel suivant :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,70 \\ 10,60 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible car $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ et la matrice A^{-1} s'obtient de la manière suivant :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc résoudre le système matriciel :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18,70 \\ 10,60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18,70 + 2 \times 10,60 \\ 2 \times 18,70 - 3 \times 10,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 5,60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

2.4 Autres problèmes

Exercice 2.6. Soit le système :

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x - 5y = 17 \end{cases}$$

1. Traduire ce système sous forme matricielle : $AX = C$, où A est la matrice des coefficients x et y, X est la matrice colonne des inconnues et C la matrice colonne des constantes.
2. Vérifier que la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est la matrice inverse de A.
3. En déduire la solution du système.

Exercice 2.7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A est inversible.
   (b) Déterminer sa matrice inverse A^{-1}.
2. Résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} x - y - z = 10 \\ -2x + 3y + 4z = 15 \\ -x + y + 2z = -12 \end{cases}$$

3 Matrice de Leontief

Définition 3.1. On considère n types de productions et ces consommations intermédiaires entre elles.

On appelle *coefficient technique* le rapport entre la consommation intermédiaire d'un produit par une branche et la production totale de la branche.

Soit C la matrice des coefficients techniques c_{ij} (c'est une matrice carrée d'ordre n).

On appelle *matrice de Leontief* la matrice $L = I_2 - C$.

Remarques 3.2.

1. Si L représente la matrice de Léontief d'un secteur d'activité, le terme d'indice (i, j) de la matrice L^{-1} est le montant dont le secteur i doit augmenter sa production pour satisfaire à une augmentation de la demande finale d'une unité de la part du secteur j.
2. Si le terme (i, j) de la matrice L^{-1} est nul, cela signifie que toute augmentation d'une unité de la demande du secteur $n^{o}\, j$ n'influence pas la production totale du secteur $n^{o}\, i$.

Exercice 3.3. On considère une économie fermée à deux secteurs dont on donne la matrice C des coefficients techniques,

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la demande finale correspondant à un niveau de production $P = \left(\begin{smallmatrix} 50 \\ 30 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Déterminer à l'aide d'une matrice inverse les niveaux de production nécessaires pour répondre à une demande finale $D = \left(\begin{smallmatrix} 200 \\ 50 \end{smallmatrix}\right)$.

Démonstration. $\Diamond$

1. La demande finale est donné par $LP = D_F$ où L est la matrice de Leontief $L = I_2 - C$. D'où :

$$D_F = (I_2 - C) \times P = \begin{pmatrix} 1 - 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 1 - 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

2. On doit résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} P$$

d'inconnue P. La matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible car $0,8 \times 0,6 - 0,1 \times 0,3 \neq 0$. D'où :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

On peut ainsi déterminer les niveaux de production :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2300}{9} \\ -\frac{400}{9} \end{pmatrix}$$

$\square$

4 Courbes polynomiales

D'après BAC Pro Aéronautique 2008

Après arrêt d'un moteur turbo propulseur, l'hélice d'un avion continue de tourner librement jusqu'à son arrêt. Son mouvement est un mouvement de rotation uniformément décéléré. Le nombre de tours N effectués en fonction du temps t (en secondes) est donné par $N = f(t) = at^2 + bt$, où a et b sont des réels à déterminer et $t \in [0\,, 72.5]$.

1. Sachant que l'hélice étudiée effectue 250 tours en 20 secondes et 510 tours en une minute, déterminer le système d'équations d'inconnues a et b correspondant à ces données.
2. Résoudre ce système à l'aide d'un calcul matriciel et en déduire l'expression de $f(t)$.
3. On admet que la fréquence de rotation de l'hélice est donnée par la dérivée f' de la fonction f. Déterminer $f'(t)$ pour $t \in [0\,, 72.5]$, puis déterminer le nombre de tours effectués par l'hélice jusqu'à son arrêt.

$\Diamond$ *Solution.*

1. Avec les données, on doit résoudre le système d'équations (d'inconnues a et b) suivant :
$$\begin{cases} 400a + 20b = 250 \\ 3600a + 60b = 510 \end{cases}$$
2. La résolution du système d'équations est équivalente à la résolution du système matriciel suivant :
$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 400 & 20 \\ 3600 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 510 \end{pmatrix}$$
La matrice A est inversible car $400 \times 60 - 3600 \times 20 \neq 0$ et
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}.$$
On a alors :
$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 510 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix}$$
On en déduit une expression de $f(t)$:
$$f(t) = -\frac{1}{10}t^2 + \frac{29}{2}t.$$
3. La fonction dérivée de f se calcule facilement :
$$f'(t) = -\frac{2}{10}t + \frac{29}{2}, \quad \text{pour tout } t \in [0, 72.5]$$
La fréquence devient nulle quand
$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{10}t + \frac{29}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{290}{4} = 72,5,$$
c'est-à-dire que les hélices s'arrêtent à $t = 72,5$. Le nombre de tours d'hélices effectués par l'hélice jusqu'à son arrêt est donnée par :
$$\int_0^{72,5} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{72,5} -\frac{1}{10}t^2 + \frac{29}{2}t\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{t^3}{30} + \frac{29t^2}{4}\right]_0^{72,5} = -\frac{72,5^3}{30} + \frac{29 \times 72,5^2}{4} \simeq 50811.$$
Il faut 50811 tours d'hélices pour que l'hélicoptère s'arrête complètement.

$\square$

5 DM TICE - Chiffrement de Hill

Lester HILL (mathématicien américain, 1891-1961) a publié en 1929 une méthode de chiffrement dite polygraphique, où il ne s'agit pas de coder un message lettre par lettre mais par « paquets » de 2 lettres.

5.1 Chiffrement

5.1.1 Méthode

On commence par associer à chaque lettre de l'alphabet un nombre compris entre 0 et 25 (le plus simple étant $A = 0$, $B = 1, \ldots, Z = 25$).

On se donne une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre 2 bien choisie.

Soit x_1 et x_2 les nombres entiers (compris entre 0 et 25) associées aux deux premières lettres du message à coder. On remplace ces deux lettres par celles associées aux nombres entiers y_1 et y_2 (eux aussi compris entre 0 et 25) définis par les congruences suivantes :

$$\begin{cases} y_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \pmod{26} \end{cases} \quad \text{soit } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

5.1.2 Exemple avec un tableur

On prend $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et on veut coder le message : `CLASSEDETERMINALES`.

Construire la feuille de calcul ci-edssous, nommée « chiffrement » :

- La colonne `D` contient les lettres du message à coder.
- La fonction `CODE` permet d'associer à chaque lettre son code ASCII compris entre 65 (pour la lettre A) et 90 (pour la lettre Z). Utiliser cette fonction pour remplir la colonne `E`.
- Pour coder les cellules de la plage `F4:F5`,
  - sélectionner les cellules de la plage `E4:E5` ;
  - saisir la formule permettant de calculer le produit de la matrice A par le vecteur colonne de la plage `E4:E5` (utiliser la fonction `PRODUITMAT`) ;
  - valider cette formule en tapant simultanément sur les touches CTRL , SHIFT , ENTREE .
- Sélectionner les cellules `F4` et `F5` puis tirer la formule vers le bas jusqu'en `F21`.
- La colonne `G` contient les restes modulo 26 des nombres situés dans la colonne `F` (utiliser la fonction `MOD`).
- La colonne `H` contient les lettres correspondant aux nombres trouvés dans la colonne `G`, obtenues avec la fonction `CAR` : par exemple, pour la cellule `H4`, $17 + 65 = 82$ et `CAR`$(82) = R$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Chiffrement de Hill							
2				Message				Message
3	Matrice A			à coder				codé
4	3	1		C	2	17	17	R
5	4	3		L	11	41	15	P
6				A	0	18	18	S
7				S	18	54	2	C

5.2 Déchiffrement

5.2.1 Méthode

On avait l'égalité $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \equiv A \times \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \pmod{26}$.

Pour retrouver les nombres x_1 et x_2 à partir des nombres y_1 et y_2, il suffit d'inverser cette égalité matricielle pour obtenir une égalité du type $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \equiv B \times \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \pmod{26}$ où B est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers définis modulo 26.

5.2.2 Détermination de la matrice B

1. Calculer la matrice inverse de A.
   Cette matrice convient-elle ? Pourquoi ?

2. Vérifier que la matrice A^{-1} peut s'écrire sous la forme $5^{-1}\left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\ -4 & 3\end{smallmatrix}\right)$
3. Existe-t-il un entier a compris entre 0 et 25 tel que $5 \times a \equiv 1 \pmod{26}$? Pourquoi ? Déterminer cet entier a.
4. En déduire que la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix}11 & 5\\ 20 & 11\end{smallmatrix}\right)$ convient.

$\Diamond$ *Solution.* 1. Au niveau de la Term ES, on peut utiliser la calculatrice. Ici, nous utiliserons le procédé d'inversion de Gauss.
On veut inverser $A = \left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{smallmatrix}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{12}{5}L_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \end{array}$$

On en déduit que :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$
La matrice ne convient pas car ses coefficients ne sont pas des nombres entiers.

2. On peut remarquer que :
$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{1}{5} \times 3 = 5^{-1} \times 3 \\ -\frac{1}{5} &= \frac{1}{5} \times -1 = 5^{-1} \times -1 \\ -\frac{4}{5} &= \frac{1}{5} \times -4 = 5^{-1} \times -4 \end{aligned}$$
et ainsi :
$$A^{-1} = 5^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = 5^{-1}\tilde{A}$$
3. Comme $\mathrm{PGCD}(25, 26) = 1$, il existe un entier a compris entre 0 et 25 tel que $5 \times a \equiv 1 \pmod{26}$ et cet entier a vaut 21.
4. On multiplie chaque coefficient de la matrice $\tilde{A}$ par 21 et on prend le reste modulo 26.
$$\begin{aligned} 3 \times 21 = 63 \equiv 11 \pmod{26} \\ -1 \times 21 = -21 \equiv 5 \pmod{26} \\ -4 \times 21 = -84 \equiv 20 \pmod{26} \end{aligned}$$
La matrice
$$B = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$$
convient pour notre problème.

$\square$

5.3 Décodage du message codé

Dans la feuille de calcul précédente, ouvrir un autre onglet et le nommer « déchiffrement ».

1. Dans la plage `A7:B8`, saisir les coefficients de la matrice B.
2. Recopier le message codé obtenu précédemment. Se placer en `D1` et choisir *Édition – Collage spécial – valeurs*.
3. Déchiffrer, en colonne `H`, le message codé en utilisant les fonctions `CODE`, `PRODUITMAT`, `MOD` et `CAR`.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Message				Message
2	Matrice inverse de A			codé				décodé
3				R	17	262	2	C
4				P	15	505	11	L
5				S	18	208	0	A
6	Matrice B			C	2	382	18	S
7				G	6	96	18	S
8				G	6	186	4	E

6 Autres problèmes vues au BAC

6.1 BAC S Pondichéry 2017 - Matrices et suites

Exercice 6.1 (Exercice 4Spé).. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

[...]

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

— la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

— les matrices carrées :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

   (b) On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

2. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n1}} + 2}$$

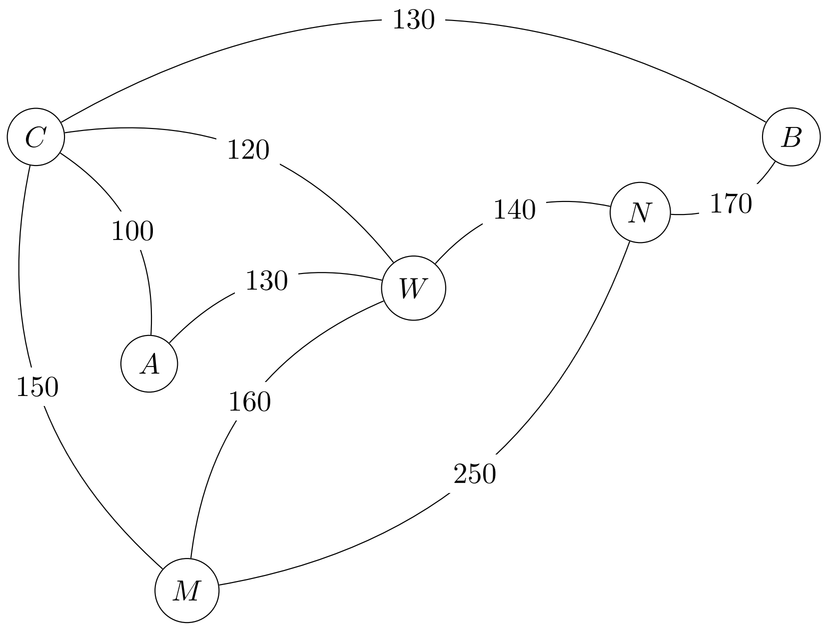
   (b) En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

6.2 BAC ES Pondichéry 2017 - Matrices et graphes

Exercice 6.2 (Exercice 3).. Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

— Atlanta (A) — Chicago (C) — New-York (N)
— Boston (B) — Miami (M) — Washingtown (W)

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion. [...]

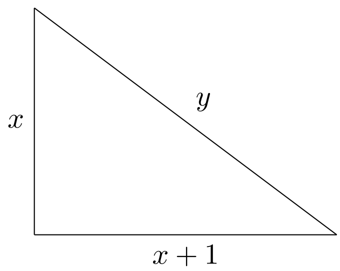
3. a. Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisqnt au maximum trois liaisons aériennes. Combien y-a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

6.3 BAC S Métropole Juin 2017 - Matrices et triangle rectangle presque isocèle

Exercice 6.3 (Exercice 4Spé).. On appelle « triangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle des côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x; y)$ définit un TRPI.

[...]

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels, on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (a) Montrer que $y'^{2} - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.
   (b) En déduire que si le couple $(x; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.
2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B.$$
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n; y_n)$ définit un TRPI.
3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

6.4 BAC S Métropole Septembre 2017 - Matrices et géométrie dans l'espace

Exercice 6.4 (Exercice 4Spé).. Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 5; -2)$, $B(7; -1; 3)$ et $C(-2; 7 : -2)$ et on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$
2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.
   À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

   Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.
3. Montrer alors que $X = NY$. En déduire le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

6.5 BAC ES Métropole Septembre 2017 - Matrices et probabilités

Exercice 6.5 (Exercice 3Spé).. Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical. En 2013, 20% des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70% des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20% des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.

Pour tout entier naturel n, on note :

— c_n la proportion des enfants de la commune à cet éveil musical en $(2013 + n)$.

— d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en $(2013 + n)$.

— $E_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $(2013 + n)$.

Ainsi, on a : $E_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste. On note :
   — C l'état « l'enfant est inscrit aux cours d'éveil musical ».
   — D l'état « l'enfant n'est pas inscrit aux cours d'éveil musical ».
2. Déterminer la matrice A de transition, c'est-à-dire la matrice vérifiant, pour tout entier naturel n, $E_{n+1} = E_n \times A$.
3. Déterminer E_1 et E_2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable en justifiant votre réponse. Interprétrer les résultats.