LEÇON Nº 24

Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de troisième et lycée

Prérequis

Résolution des équations, arithmétique, étude de fonctions

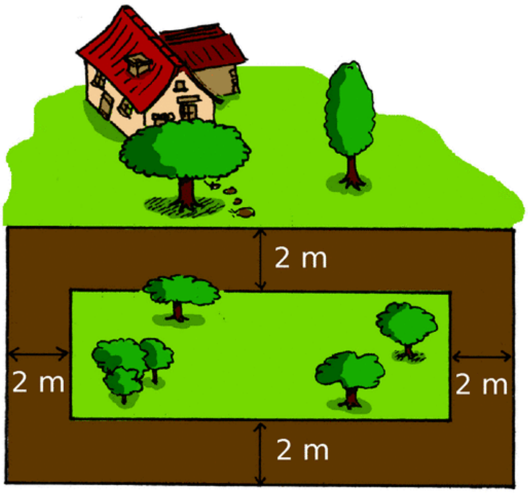
Références

- Collectif de professeurs SESAMATHS, *Sesamaths, 3ème*. Magnard, 2008.
- C. BOULONNE, *LET'S MATHS nº 60 - Enigmes SdM de la « Voix du Nord »*. URL : `https://www.youtube.com/watch?v=uo_FR-mo4ek`.
- G. JULIA, *Épreuve sur dossier au CAPES de Mathématiques*. URL : `http://gjmaths.pagesperso-orange.fr/epdos.html`.
- C. BOULONNE, *3 énigmes de la Voix du NOrd | SdM2017 nº 9*. URL : `https://www.youtube.com/watch?v=1Vrgx2xd4Yc`.
- *Programmation linéaire*. `http://extranet.editis.com/It-yonixweb/images/500/art/doc/8/85a981cb4526acd3393830353930393136343535.pdf`.

Table des matières

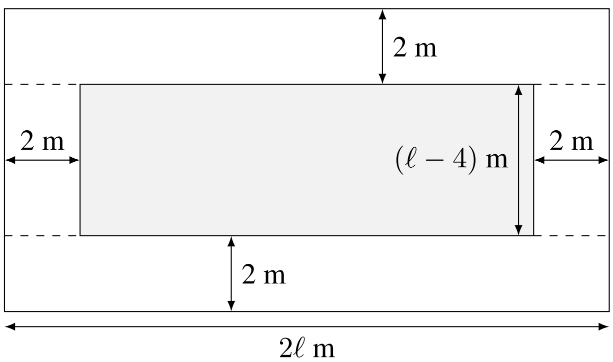
1 Résolution d'équations du premier degré

Problème 1.1. Madame Anabelle Pelouse possède un terrain rectangulaire dont la longueur est le double de sa largeur. Ce terrain est constitué d'un très beau gazon entouré d'une allée.



1. Sachant que l'aire de l'allée est 368 m^2, calculer la mesure exacte de la largeur du terrain.
2. En déduire les aires, en m^2, les aires du terrain et de la partie recouverte de gazon.

♢ *Solutions.* 1. Soit ℓ la largeur du terrain, on a donc : $L = 2\ell$. Si on prolonge les longueurs du rectangle de pelouse vers le bord extérieur du terrain, on obtient un découpage de l'allée en quatre rectangles.



On peut ainsi calculer l'aire de l'allée de cette manière :

$$\mathcal{A}_A = 2 \times 2 \times 2\ell + 2 \times 2 \times (\ell - 4) = 4 \times (2\ell + \ell - 4)$$

On résout donc l'équation suivante :

$$4(3\ell - 4) = 368 \Leftrightarrow 3\ell - 4 = 92 \Leftrightarrow 3\ell = 96 \Leftrightarrow \ell = \frac{96}{3} = 32.$$

La mesure exacte de la largeur du terrain est de 32 m. La longueur du terrain est donc de 64 m.

2. On peut alors calculer l'aire du terrain :

$$\mathcal{A}_T = 32 \times 64 = 2048 \text{ m}^2.$$

Ainsi, l'aire de la surface gazonnée est :

$$\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_T - \mathcal{A}_A = 2048 - 368 = 1680 \text{ m}^2.$$

□

Problème 1.2. Un archer s'entraîne tous les jours pendant une semaine. À chaque nouvel entrainement, il tire 10 flèches de plus que la veille. Combien de flèches tire-t-il le premier jour, sachant qu'à la fin de la semaine, il aura tiré 1400 flèches au total ?

◊ *Solutions.* Soit n le nombre de flèches tirés au premier jour d'entrainement. L'archer aura donc tiré :

— $n + 10$ flèches le deuxième jour ;
— $n + 20$ flèches le troisième jour ;
— $n + 30$ flèches le quatrième jour ;
— ...
— $n + 60$ flèches le septième jour.

L'archer aura donc tiré un total de :

$$n + (n + 10) + (n + 20) + \cdots + (n + 60) = 7n + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 = 7n + 210.$$

Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue n : $7n + 210 = 1400$

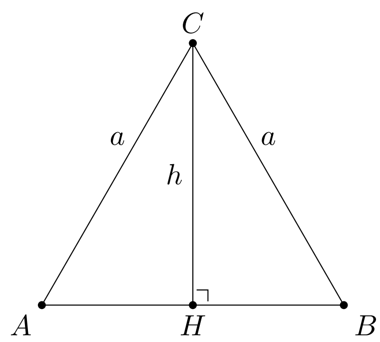
$$7n + 210 = 1400 \Leftrightarrow 7n = 1400 - 210 \Leftrightarrow 7n = 1190 \Leftrightarrow n = \frac{1190}{7} = 170.$$

L'archer aura donc tiré 170 flèches le premier jour. □

2 Résolution d'équations du second degré

Problème 2.1 (CRPE 2015).. Soit un triangle équilatéral de côté a. Quelle est la mesure h de la hauteur du triangle équilatéral ?

◊ *Solutions.* Faisons un petit schéma de la situation :



On note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du point C. On a alors $CH = h$.

Comme ABC est un triangle équilatéral, la hauteur du triangle issue du point C est aussi la médiatrice du segment $[AB]$. Ainsi H est le milieu du segment $[AB]$. Soit $AB = a$, on a alors $AH = \frac{a}{2}$. Le triangle AHB est un triangle rectangle en H donc on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la mesure de h.

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

On a alors :

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow h = \pm\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Or h est une longueur donc positive et ainsi : $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. □

Problème 2.2 (Dossier CAPES 2014)..

1. Est-il possible de construire un rectangle de périmètre 17 cm et d'aire 17 cm² ? Si oui, on précisera les dimensions de ce rectangle.
2. Plus généralement, soit k un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de k est-il possible de construire un rectangle de périmètre k (en cm) et d'aire k (en cm²) ?

◇ *Solutions.*

1. Soit L et ℓ les dimensions d'un tel rectangle. On doit alors résoudre le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 2(\ell + L) = 17 \\ L\ell = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell + L = \frac{17}{2} (1) \\ L\ell = 17\ (2) \end{cases}.$$

Dans l'équation (1), on peut exprimer L en fonction de ℓ : $L = \frac{17}{2} - \ell$, on a donc dans l'équation (2) :

$$\left(\frac{17}{2} - \ell\right)\ell = 17 \Leftrightarrow -\ell^2 + \frac{17}{2}\ell - 17 = 0 \Leftrightarrow \ell^2 - \frac{17}{2}\ell + 17 = 0.$$

On résout cette équation du second degré avec la méthode du discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{17}{2}\right)^2 - 4 \times 17 = \frac{289}{4} - \frac{16 \times 17}{4} = \frac{289 - 272}{4} = \frac{17}{4}$$

Δ étant positif, l'équation admet deux solutions réelles. $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{17}}{2}$. Ainsi :

$$\ell_1 = \frac{\frac{17}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \frac{17 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{17 + \sqrt{17}}{4}$$

Comme $L = \frac{17}{2} - \ell$, on obtient :

$$L_1 = \frac{17}{2} - \frac{17 - \sqrt{17}}{4} = \frac{2 \times 17 - 17 + \sqrt{17}}{4} = \frac{17 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{17 - \sqrt{17}}{4}.$$

D'où le rectangle qui convient à pour dimension $\ell = \frac{17 - \sqrt{17}}{4}$ et $L = \frac{17+\sqrt{17}}{4}$.

Soit $k > 0$ et L_k et ℓ_k les dimensions d'un rectangle de périmètre k cm et d'aire k cm². La recherche de dimension revient à résoudre l'équation du second degré suivante :

$$\ell_k^2 - \frac{k}{2}\ell_k + k = 0.$$

On résout cette équation du second degré avec la méthode du discriminant :

$$\Delta_k = \frac{k^2}{4} - 4 \times k = \frac{k^2 - 16k}{4} = \frac{k(k - 16)}{4}.$$

Or $\Delta_k \geq 0$ si et seulement $k(k-16) \geq 0$, c'est-à-dire quand $k \geq 16$.

Ainsi, pour $k \geq 16$, il est possible de construire un rectangle de périmètre k (en cm) et d'aire k (en cm^2). Les dimensions d'un tel rectangle sera :

$$\ell = \frac{k - \sqrt{k}}{4} \quad \text{et} \quad L = \frac{k + \sqrt{k}}{4}.$$

□

Problème 2.3 (Dossier CAPES 2014).. Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm, on place une bille de rayon 4 cm. On verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille (la surface de l'eau est alors tangente à la bille qui se trouve au fond du récipient). On retire ensuite la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R différent de 4 cm.

Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

◊ *Solutions.* On calcule le volume d'eau nécessaire pour recouvrir la bille de 4 cm :

$$V_E = V_B - V_C = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2 \times \pi = \pi \times \left(\frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2\right).$$

Si on veut plonger une nouvelle bille de rayon R différent de 4 (de volume V_R), il faut que R vérifie l'équation suivante :

$$V_E + V_R = V_{CR} \Leftrightarrow \pi \times \left(\frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2\right) + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2^R \times 10 \times \pi.$$

On peut factoriser par π et on multiplie par 3 dans les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$24 \times 10^2 - 4 \times 4^3 + 4R^3 = 6R \times 10^2 \Leftrightarrow 2144 + 4R^3 - 6R \times 10^2 = 0$$

On peut ensuite diviser par 4 et on obtient :

$$2144 + 4R^3 - 6R \times 10^2 = 0 \Leftrightarrow R^3 - 150R + 536 = 0 \quad (E)$$

Une solution évidente de (E) est $R = 4$ car on se ramène au cas précédent. On a alors :

$$\begin{aligned} R^3 - 150R + 536 &= (R-4)(aR^2 + bR + c) \\ &= aR^2(R-4) + bR(R-4) + c(R-4) \\ &= aR^3 - 4aR^2 + bR^2 - 4bR + cR - 4c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = -150 \\ -4c = 536 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -134 \end{cases}.$$

D'où :

$$R^3 - 150R + 536 = (R-4)(R^2 + 4R - 134).$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $R^2 + 4R - 134 = 0$ par la méthode du discriminant.

$$\Delta = 4^2 + 4 \times 134 = 16 + 536 + 16 = 552.$$

Δ étant positif, l'équation admet deux solutions réelles et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{552} = 2\sqrt{138}$.

$$R_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{138}}{2} = -2 + \sqrt{138} \approx 9,75 \quad \text{et} \quad R_2 = -2 - \sqrt{138} < 0.$$

Conclusion : on peut plonger une nouvelle bille de rayon $R \approx 9,75$ cm. □

3 Théorème des valeurs intermédiaires, approximations

Problème 3.1 (Dossier CAPES 2014).. On considère la fonction g définie sur $[-6\,,+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 276$. On donne son tableau de variations ci-dessous :

x	-6		-2		5		$+\infty$
			344				$+\infty$
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-120				1		

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-6\,,+\infty]$.
2. Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) avec une amplitude de $0,01$.

$\Diamond$ *Solutions.* 1. On travaille sur les différents intervalles où g est strictement monotone.

— g est continue et strictement croissante sur $[-6\,,-2]$, $g(-6) = -120 < 0$ et $g(-2) = 344 > 0$ donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-6\,,-2]$.

— g est continue et strictement décroissante sur $[-2\,,5]$, $g(-2) = 344 > 0$ et $g(5) = 1 > 0$ donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-2\,,5]$.

— g est continue et strictement croissante sur $[5\,,+\infty[$, $g(5) = 1 > 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$$

donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ admet n'admet pas de solution sur $[5\,,+\infty]$.

Conclusion : g admet une unique solution α sur l'intervalle $[-6\,,+\infty]$.

2. Par approximation successives, on trouve :

$$-6 \leq \alpha \leq -5 \text{ (pas 1)}$$

$$-5,6 \leq \alpha \leq -5,5 \text{ (pas } 0,1)$$

$$-5,51 \leq \alpha \leq -5,5 \text{ (pas } 0,01)$$

$\square$

Problème 3.2. Une entreprise fabrique des objets. Le bénéfice $B(x)$ (en milliers d'euros) tiré de la fabrication et de la vente de x milliers d'unités (x variant de 0 à 3) est défini par la fonction suivante :

$$B(x) = x^3 - 2x^2 - 2.$$

Déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour que le bénéfice de l'entreprise soit nul.

$\Diamond$ *Solutions.* On étudie la fonction B sur l'intervalle $[0;3]$.

$$B'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

L'équation $B'(x) = 0$ admet deux solutions $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$. Ainsi,

x	0		$4/3$		3
$B'(x)$	0	$-$	0	$+$	
	-2				7
B		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\frac{86}{27} \approx -3,185$		

On peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires :

— Sur l'intervalle $[0\,,4/3]$, B est continue et strictement décroissante, $B(0) = -2 < 0$ et $B(4/3) = -86/27 < 0$ donc $B(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0\,,4/3]$.
— Sur l'intervalle $[4/3\,,3]$, B est continue et strictement croissante, $B(4/3) - 86/27 < 0$ et $B(3) = 7 > 0$ donc $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[4/3\,,3]$.

Conclusion : $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,,3]$. On donne un encadrement de la valeur de α avec une amplitude de $0,01$.

$$2 \leq \alpha \leq 3 \text{ (pas 1)}$$

$$2,3 \leq \alpha \leq 2,4 \text{ (pas } 0,1)$$

$$2,35 \leq \alpha \leq 2,36 \text{ (pas } 0,01)$$

Conclusion : il faut fabriquer entre 2350 et 2360 objets pour que le bénéfice de l'entreprise soit nul. □

4 Résolution d'un système linéaire

Voir la résolution d'un système linéaire dans la leçon **L2020-23 : Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations. Exemples de résolution**

Problème 4.1 (Brevet Nouvelle Calédonie 2017).. Alexandra achète 2 cahiers et 3 crayons, elle paie 810 F. Nathalie achète 1 cahier et 5 crayons, elle paie 650 F.

Combien coûte un cahier et combien coûte un crayon ?

◊ *Solutions.* Ce problème a été donné au Brevet Nouvelle-Calédonie 2017 sous un format QCM. Les élèves qui passaient l'épreuve pouvait vérifier les réponses données. Nous allons à notre niveau résoudre le système d'équation sous-jacent au problème.

Soit x le prix d'un cahier et y le prix d'un crayon. On est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 810 & (1) \\ x + 5y = 650 & (2) \end{cases}.$$

Dans l'équation (2), on peut remarquer que : $x = 650 - 5y$ d'où, on peut remplacer la valeur de x dans l'équation (1) :

$$2(650 - 5y) + 3y = 810 \Leftrightarrow 1300 - 10y + 3y = 810 \Leftrightarrow -7y = -490 \Leftrightarrow y = \frac{-490}{-7} = 70.$$

On peut maintenant remplacer la valeur de y dans l'équation (2), on trouve :

$$x = 650 - 5 \times 70 = 650 - 350 = 300.$$

On peut vérifier que les solutions trouvées vérifient bien les équations du système :

$$2 \times 300 + 3 \times 70 = 600 + 210 = 810;$$
$$300 + 5 \times 70 = 300 + 350 = 650.$$

Conclusion : un cahier coûte 300 € et un crayon coûte 70 €. □

Problème 4.2. Un concours pour participer au prochain voyage sur Mars comporte 30 questions. Chaque bonne réponse rapporte 7 points mais chaque mauvaise en retire 12. Une question sans réponse ne modifie pas le score. Le score d'une martienne est 77 et elle est sûre de s'être trompée au moins une fois.

À combien de questions cette martienne a-t-elle fourni une réponse fausse ?

$\lozenge$ *Solution.* Soit b le nombre de bonnes réponses, f le nombre de réponses fausses et n le nombre de questions non répondues. b, f et n sont solutions du système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 7b - 12f = 77 \\ b + f + n = 30 \\ f > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Comme 77 est un multiple de 7, il faut que le nombre de réponses que $12 \times f$ soit un multiple de 7. Comme 12 est premier avec 7, d'après le lemme de Gauss, f est un multiple de 7 strictement supérieur à 0. On peut tester des valeurs de f :
— si $f = 7$, $7b = 77 + 12 \times 7 = 7 \times (12 + 11) \Leftrightarrow b = 23$ et on aurait $b + f + n = 30 \Leftrightarrow 30 + n = 30 \Leftrightarrow n = 0$.
— si $f = 14$, $7b = 77 + 12 \times 14 = 7 \times (24 + 11) \Leftrightarrow b = 35$. Or, $b + f + n \geq 30$ donc on ne peut pas retenir cette solution.

L'unique solution du système d'équations $(*)$ est $(b, f, n) = (23, 7, 0)$. $\square$

5 Équations diophantiennes et théorème des restes chinois

Exercice 5.1 (CAPES 2013).. On souhaite planter des orangers dans un jardin qui dispose de deu fontaines. Pour simplifier l'irrigation, les orangers à planter doivent être alignés avec les deux fondaintes. Pour modéliser la situation, on se place dans un repère orthonormé dans lequel les points $A(10; 10)$ et $B(87; 31)$ désignent les deux fontaines.

1. Un premier jardinier propose de planter un oranger au point $G(30; 16)$. Cette proposition convient-elle ? Justifier votre réponse.
2. Un second jardinier propose de planter autant d'orangers que possible en respectant les deux conditions suivantes :
   — chaque oranger est planté sur le segment situé entre les deux fontaines,
   — chaque oranger est planté sur un point dont les deux coordonnées sont entières.
   Déterminer le nombre maximal d'orangers qu'il est possible de planter en respectant ces deux conditions et préciser leurs coordonnées dans le repère.

Solution. $\lozenge$

1. On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) :
   $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{31 - 10}{87 - 10} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$$
   puis :
   $$10 = \frac{3}{11} \times 10 + b \Leftrightarrow b = 10 - \frac{30}{11} = \frac{110 - 30}{11} = \frac{80}{11}.$$
   La droite (AB) a pour équation cartésienne : $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$. On vérifie que $G(30; 16)$ appartient ou non à la droite (AB) :
   $$\frac{3}{11} \times 30 + \frac{80}{11} = \frac{90 + 80}{11} = \frac{170}{11} \approx 15,45.$$
   Donc : le premier jardinier ne pourra pas planter l'oranger au point $G(30; 16)$.
2. On se propose de déterminer tous les points $(x; y)$ tels que x entier et $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$ soit entier ou encore :
   $$11y = 3x + 80 \Leftrightarrow 11y - 3x = 80.$$

On a : $\text{PGCD}(3, 11) = 1$ donc l'équation diophantienne a une infinité de solutions. On donne la solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$ est :

$$1 = 22 - 21 = 11 \times 2 - 3 \times 7$$

On a alors comme solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$: $x = 7 \times 80 = 560$ et $y = 2 \times 80 = 160$. Ainsi les solutions générales de l'équation diophantienne est :

$$(x, y) = (560 + 11k, 160 + 3k)$$

On cherche les solutions (x, y) tels que $10 < x < 87$ et $10 < y < 31$.

$$\begin{gathered}
560 + 11k > 10 \Leftrightarrow 11k > 10 - 560 \Leftrightarrow 11k > -550 \Leftrightarrow k > -50 \\
560 + 11k < 87 \Leftrightarrow 11k < 87 - 560 \Leftrightarrow 11k < -473 \Leftrightarrow k < -43 \\
160 + 3k > 10 \Leftrightarrow 3k > 10 - 160 \Leftrightarrow 3k > -150 \Leftrightarrow k > -50 \\
160 + 3k < 31 \Leftrightarrow 3k < 31 - 160 \Leftrightarrow 3k < -129 \Leftrightarrow k < -43
\end{gathered}$$

D'où : $-50 < k < -43$ et on obtient les six coordonnées de plantation d'orangers :

k	x	y
-49	21	13
-48	32	16
-47	43	19
-46	54	22
-45	65	25
-44	76	28

On pourra planter des orangers en $(21; 13)$, $(32; 16)$, $(43; 19)$, $(54; 22)$, $(65; 25)$ et $(76; 28)$.

$\square$

Problème 5.2. Le chef de fanfare rassemble ses musiciens et constate qu'il y a quelques absents. Il tente de les disposer en rangées de 6 et constate qu'il reste un musicien. Même en chose en les disposant en rangées de 7, de 3 ou de 4 : il reste toujours un musicien. Il finit par les mettre en rangées de 5 et là, ô miracle, cela tombe juste.

Combien de musiciens sont présents ce jour-là ?

$\Diamond$ *Solutions.* Soit n le nombre de personnes dans la fanfare. n est solution du système de congruences suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 6 \\ n \equiv 1 \pmod 7 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

Or, ici, $\text{PGCD}(6, 4) \neq 1$ donc on peut simplifier ce système (en remarquant que $n \equiv 1 \pmod 6 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 3$ et $n \equiv 1 \pmod 2$) :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 2 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ n \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

Ici,

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{PGCD}(2,3)\\ \mathrm{PGCD}(2,5)\\ \mathrm{PGCD}(2,7)\\ \mathrm{PGCD}(3,5)\\ \mathrm{PGCD}(3,7)\\ \mathrm{PGCD}(5,7)\end{array}\right\} = 1$$

donc, d'après le théorème des restes chinois, le système de congruences admet une unique solution. Cette solution peut être obtenu grâce à un algorithme :

Diviseurs	Reste	Valeur	Exp.
7	1	1	(1)
5	0	15	(2)
3	1	85	(3)
2	1	85	(4)

1. (1) On commence à 0 et on prend le plus petit nombre dont le reste par la divison euclidienne par 7 est 1, c'est bien entendu 1.
2. (2) Quand on divise 1 par 5, le reste de la division n'est pas 0 donc on teste les nombres de la forme $7k+1$ avec $1 \leq k \leq 4$:

$$\begin{aligned} &k = 1\,; 7\times 1 + 1 = 8 \equiv 3 \pmod 5\\ &k = 2\,; 7\times 2 + 1 = 15 \equiv 0 \pmod 5\\ &\quad\ldots \end{aligned}$$

   Le nombre qui convient est bien 15.
3. (3) Quand on divise 15 par 3, on obtient un reste par la division euclidienne de 0, ce qui ne correspond à la condition $n \equiv 1 \pmod 3$. On teste alors les nombres de la forme $(7\times 5)k + 15 = 35k + 15$ avec $1 \leq k \leq 2$

$$\begin{aligned} &k = 1\,; 35\times 1 + 15 = 50 \equiv 2 \pmod 3\\ &k = 2\,; 35\times 2 + 15 = 85 \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

   On peut prendre le nombre 85.
4. (4) Quand on divise le nombre 85 par 2, on obtient comme reste par la division euclidienne de 1, ce qui correspond à notre condition.

Finalement :

$$\begin{cases} 85 \equiv 1 \pmod 7\\ 85 \equiv 0 \pmod 5\\ 85 \equiv 1 \pmod 3\\ 85 \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

85 est donc solution de notre système de congruences. Conclusion : il y a 85 musiciens qui constituaient la fanfare. □

Problème 5.3. Au rugby, il n'y a que 4 façons de marquer des points : la pénalité, le drop, l'essai et la transformation.

— Chaque pénalité ou drop réussi permet de marquer 3 points.
— Chaque essai non transformé rapporte 5 points.
— Chaque essai transformé rapporte 7 points (5 points pour l'essai et 2 points supplémentaires pour sa transformation).

Le match France-NZ (Nouvelle-Zelande) s'est terminé sur le score de 37-52. La NZ a marqué 6 essais. La France, qui a au moins marqué 1 essai, a marqué deux fois moins de pénalités que son adversaire. Aucun drop n'a été marqué.

Démonstration. Solutions : `https://www.youtube.com/watch?v=uo_FR-mo4ek` (à partir de 13 min 34). □

6 Résolution d'inéquations

Problème 6.1. Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

Entreprise A 110 € au départ et $1,75$ € du kilomètre ;

Entreprise B 125 € au départ et $1,50$ € du kilomètre.

À partir de quel kilométrage, le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

◊ *Solution.* Soit x le nombre de kilomètres à parcourir :
— L'entreprise A facturera sa prestation : $110 + 1,75x$;
— l'entreprise B facturera sa prestation : $125 + 1,50x$.
Le transporteur B sera plus avantageux quand :

$$110 + 1,75x \geq 125 + 1,50x \Leftrightarrow 0,25x \geq 125 - 110 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq 60.$$

À partir de 60 kilomètres, le transporteur B sera plus avantageux que le transporteur A. □

Problème 6.2. Lors d'un match de football, le gardien de but doit dégager le ballon de sa zone vers les attaquants de son équipe.

Pour cela, il place le ballon au sol, sur sa ligne des 6 mètres et fait un dégagement. Ce tir forme une parfaite parabole : le ballon atteint une hauteur de 2 mètres, 60 mètres plus loin (donc à 66 mètres du bord du terrain) et retombe au sol à 70 mètres (donc à 76 mètres du bord du terrain).

À quel moment le ballon atteint une hauteur de 3 mètres ?

◊ *Solution.* La trajectoire du ballon est représenté par la courbe représentative d'une certaine fonction f du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(60) = 2 \\ f(70) = 0 \end{cases}.$$

Comme $f(0) = 0$, $c = 0$ et donc $f(x) = x(ax + b)$. On sait aussi que $f(70) = 0$ donc :

$$f(70) = 70(a \times 70 + b) = 0 \Leftrightarrow 70a = -b \Leftrightarrow a = -\frac{1}{70}b.$$

On peut avoir la valeur de b grâce à $f(60) = 2$:

$$f(60) = 60\left(-\frac{b}{70} \times 60 + b\right) = 2 \Leftrightarrow 60\left(\frac{70b - 60b}{70}\right) = 2 \Leftrightarrow 60 \times \frac{1}{7}b = 2$$

et donc : $b = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$. On peut donc en déduire la valeur de a : $a = -\frac{7}{30} \times \frac{1}{70} = -\frac{1}{300}$. On a alors :

$$f(x) = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x.$$

On veut savoir à quel moment le ballon atteint une hauteur de 3 mètres, il faut alors résoudre l'inéquation :

$$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3 \geq 0.$$

On étudie le signe du polynome $-\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3$ et donc les solutions de l'équation (E) : $-\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3 = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{7}{30}\right)^2 - 4 \times (-3) \times \left(-\frac{1}{300}\right) = \frac{49}{900} - \frac{12}{300} = \frac{49-36}{900} = \frac{13}{900}.$$

Δ étant positif, l'équation (E) admet deux solutions réelles et $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{13}}{30}$. On a alors :

$$x_1 = \frac{-7/30 - \sqrt{13}/30}{2 \times -1/300} = \frac{(7+\sqrt{13})/30}{2/300} = \frac{(7+\sqrt{13})}{30} \times \frac{300}{2} = 5(7+\sqrt{13}) = 35+5\sqrt{13} \approx 53,02.$$

$$x_2 = 5(7-\sqrt{13}) = 35 - 5\sqrt{13} \approx 16,97.$$

Le ballon est au-dessus de 3 mètres du sol pour une distance comprise entre $16,97$ m et $53,02$ m. $\square$

7 Programmation linéaire

Problème 7.1. Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois. Une table nécessite 3 heures de découpe et 2 heures de finition. Un buffet nécessite $1h30$ de découpage et 6 heures de finition. Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et 78 heures pour la finition. Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et 300 € par buffet.

Déterminer le nombre x de tables et y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

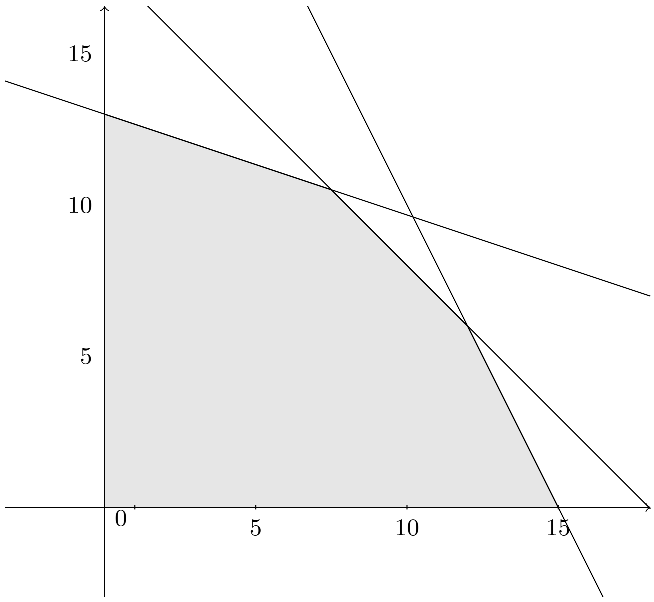
$\lozenge$ Soit x le nombre de tables à produire et y le nombre de buffets à produire.

- La quantité de tables à produire est positive donc $x \geq 0$.
- La quantité de buffets à produire est positive donc $y \geq 0$.
- En un mois, on ne peut produire que 18 meubles donc $x + y \leq 18$.
- En un mois, x est limité à 45 heures de découpage, une table nécessite 3 heures de découpage et un buffet, $1h30$ de découpage donc $3x + 1,5y \leq 45 \Leftrightarrow 6x + 3y \leq 90 \Leftrightarrow 2x + y \leq 30$.
- En un mois, on est limité à 78 heures de finition, une table nécessite 2 heures de finition et un buffet 6 heures de finition. Cela se traduit par l'inégalité $2x + 6y \leq 78 \Leftrightarrow x + 3y \leq 39$.

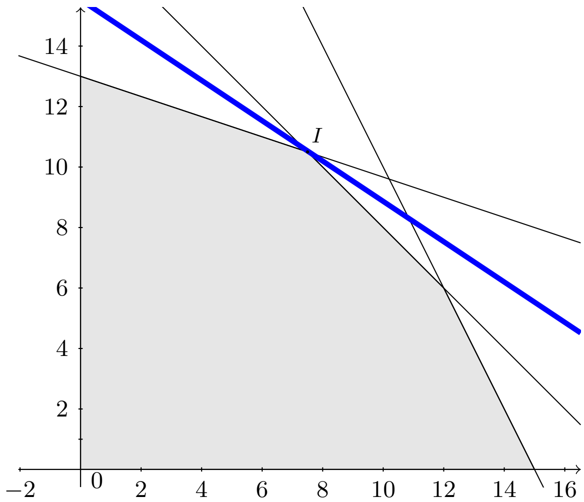
Donc les contraintes de production se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 18 \\ 2x + y \leq 30 \\ x + 3y \leq 39 \end{cases}.$$

On trouve le domaine des contraintes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Le bénéfice B est une fonction de x et y. Elle s'exprime par $B(x, y) = 200x + 300y$.



Graphiquement, le point I du domaine des contraintes pour lequel le bénéfice est maximum est $(7,5; 10,5)$. Le bénéfice maximum est donc : $200 \times 7,5 + 300 \times 10,5 = 4650$.