LEÇON N° 23

Systèmes d'équations linéaires et systèmes d'inéquations linéaires. Applications.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Seconde (nouveau programme 2020), Terminale

Prérequis

Résolution d'une équation à une inconnue, équation de droite, arithmétique, nombres complexes, fonctions

Références

— A. IMONE, *Systèmes d'équations, d'inéquations*. Troisième. `http://albertimone.voila.net/Brevet/syst.3.html`.
— S. PASQUET, *Systèmes d'équations et inéquations affines*. Première ES. `http://mathweb.fr`.
— J. ONILLION, *Systèmes d'inéquations, régionnement du plan*. URL : `http://tanopah.jo.free.fr/seconde/regionalpha.php`.
— *Programmation linéaire*. `http://extranet.editis.com/It-yonixweb/images/500/art/doc/8/85a981cb4526acd3393830353930393136343535.pdf`.
— S. GOUIN & al, *Dimathème TSTT (Action et communication commerciales administratives)*. Programme 1999. Didier.
— N. NGUYEN & al., *Maths MPSI*. Ellipses, 2e édition, 2010.

Table des matières

1 Cas particulier : systèmes d'équations 2×2

1.1 Préliminaires

Ce sont les premiers systèmes d'équations que l'on rencontre au niveau collège.

PROPRIÉTÉ 1.1. Pour déterminer complétement la valeur de deux inconnues dans une équation, il en faut éventuellement une deuxième.

1.2 Méthodes de résolution

On décrit maintenant les méthodes de résolution d'un tel système d'équation.

Définition 1.2 (Résolution par substitution). Cette méthode de résolution consiste à exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.

Définition 1.3 (Résolution par comparaison). Cette méthode de résolution consiste à établir une égalité à partir d'une inconnue exprimée de la même manière dans chaque équation.

Définition 1.4 (Résolution par addition). Cette méthode de résolution consiste à ajouter membre à membre les deux égalités pour me garder qu'une seule inconnue.

Définition 1.5 (Résolution graphique). Cette méthode de résolution consiste à relever (graphiquement) les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple 1.6. Résoudre, par différentes méthodes, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

$\Diamond$ On résout le système d'équations par les différentes méthodes décrites plus en haut :

Par substitution On peut exprimer x en fonction de y dans la première équation du système :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ x &= 9 - 2y \end{aligned}$$

On remplace alors x par cette valeur « $9 - 2y$ » dans la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ x &= 5 + 3y \\ 9 - 2y &= 5 + 3y \\ 4 &= 5y \\ y &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

On remplace enfin y par sa valeur dans une des égalités pour trouver x :

$$x = 9 - 2y = 9 - 2 \times \frac{4}{5} = 9 - \frac{8}{5} = \frac{37}{5}.$$

Par comparaison On exprime, par exemple, x dans chaque égalité en fonction de y

$$x = -2y + 9 \quad (1)$$
$$x = 3y + 5 \quad (2)$$

À parti de (1) et (2), on peut former une nouvelle égalité :

$$-2y + 9 = 3y + 5$$
$$4 = 5y$$

et on en déduit ainsi les solutions du système.

Par addition On veut « éliminer » les termes en x. Pour cela, on multiplie la seconde équation par -1 œ

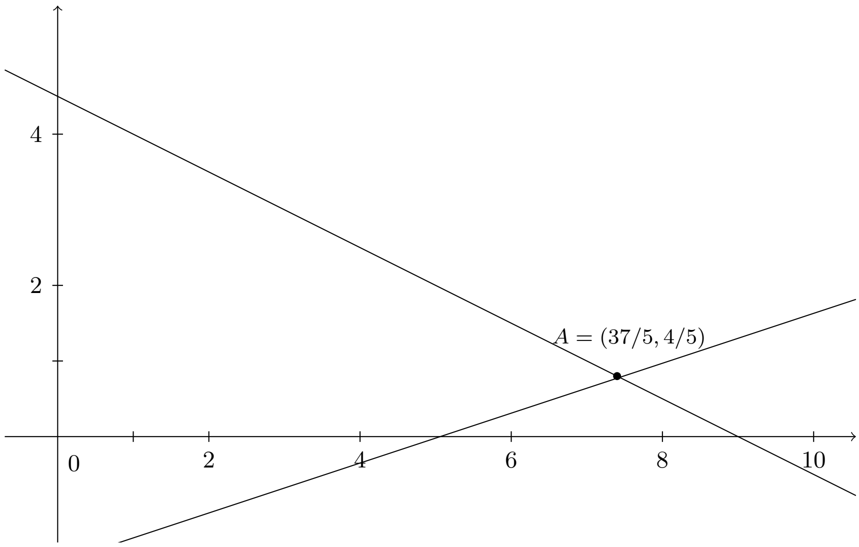
$$-(x - 3y) = 5$$
$$-x + 3y = 5$$

et on ajoute la première et la seconde :

$$x - x + 2y + 3y = 9 - 5$$
$$5y = 4$$

et on en déduit ainsi les solutions du système.

Graphiquement Les deux droites d'équations respectives $x + 2y = 9$ soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ et $x - 3y = 5$ soit $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ ont un point d'intersection de coordonnées $x = \frac{37}{5}$ et $y = \frac{4}{5}$.



Conclusion Les solutions de ce système d'équations est le couple $(37/5, 4/5)$.

2 Cas général d'un système d'équations, méthode du pivot de Gauss

2.1 Méthode du pivot de Gauss

On décrit la méthode du pivot de Gauss pour un système d'équations $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Méthode du pivot de Gauss : $\Diamond$ Soit à résoudre le système d'équations $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Il est équivalent à résoudre ceci :

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

— On commence par vérifier si $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$ alors on permute la ligne L_1 et L_i ($2 \leq i \leq n$) tel que $a_{i1} \neq 0$ et on indexe de nouveau la matrice A des coefficients (a_{ij}).
— On effectue les opérations élémentaires pour $2 \leq i \leq n$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$. On obtient une matrice $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$ dont la première colonne a pour coefficient a_{11} et les autres coefficients sont nuls.
— On vérifie que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Si $a_{22}^{(1)} = 0$ alors on permute la ligne L_2 et L_i avec $3 \leq i \leq n$ tel que $a_{i2}^{(1)} \neq 0$.
— On effectue les opérations élémentaires pour $3 \leq i \leq n$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} L_2 \ldots$
— $\ldots$
— On procède ainsi (il y a au maximum $k-1$ étapes) jusqu'à obtenir que des 0 sous la diagonale principale : $A^{(k-1)}$ triangulaire supérieure.

Remarque 2.1. Dans le principe de la méthode de Gauss, nous expliquons que si (par exemple) $a_{11} = 0$, on peut permuter la ligne L_1 avec la ligne L_i ($2 \leq i \leq n$) tel que $a_{i1} \neq 0$. Mais il se peut que, pour tout $2 \leq i \leq n$, $a_{i1} = 0$.

Si tel est le cas, il faut envisager de permuter les colonnes. Il faudra donc trouver $a_{1i} \neq 0$ pour $2 \leq i \leq n$.

Si on ne peut pas, c'est qu'un bloc de la matrice n'a que des éléments nuls et donc le procédé du pivot de Gauss s'arrête.

2.2 Application sur un exemple

Les systèmes d'équations étudiés en Première ES sont généralement 3×3. On utilise la méthode du pivot de Gauss sur un exemple.

Exemple 2.2. Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (L_1) \\ x + 2y - z = 9 & (L_2) \\ -x - y + 3z = 1 & (L_3) \end{cases}$$

$\Diamond$ On fait les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow 2L_2$ et $L_3 \leftarrow 2L_3$.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ 2x + 4y - 2z = 18 & L_2 \leftarrow 2L_2 \\ -2x - 2y + 6z = 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 \end{cases}$$

Ensuite, on peut faire : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ 3y - 3z = 15 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + 7z = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ y - z = 5 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3} \\ -y + 7z = 5 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = 5 \\ 6z = 10 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y & = 3 - \frac{10}{6} \\ y & = 5 + \frac{10}{6} \\ z & = \frac{10}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & = \frac{4}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{16}{3} \\ y & = \frac{20}{3} \\ z & = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{20}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

3 Système d'inéquations

3.1 Principe et remarques

THÉORÈME 3.1. La droite D a pour équation :

$$ax + by + c = 0.$$

La droite D partage le plan en deux demi-plans.
- Pour tout point $M(x, y)$ de l'un d'entre eux l'expression $ax + by + c$ est positive.
- Pour tout point $M(x, y)$ de l'autre demi-plan, l'expression $ax + by + c$ est négative.

Remarque 3.2. Pour tout point $M(x, y)$ d'un même demi-plan, l'expression $ax + by + c$ garde le même signe.

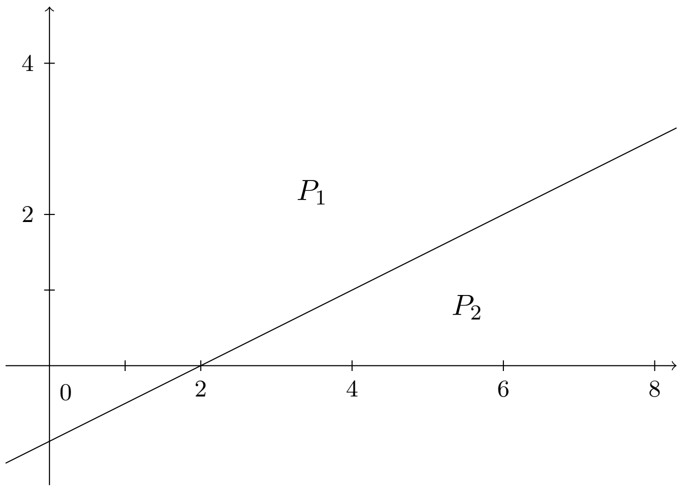
3.2 Un exemple

Exemple 3.3. Résoudre le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x - 2y - 2 \geq 0 \\ 5x - 4y - 24 < 0 \\ 3x + y + 4 > 0 \end{cases}$$

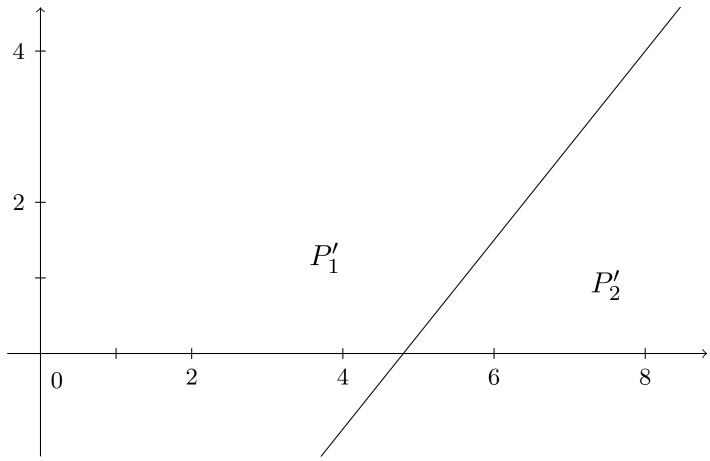
$\Diamond$

1. La droite d'équation $D : x - 2y - 2 = 0$ passe par les points $(0, -1)$ et $(2, 0)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2.



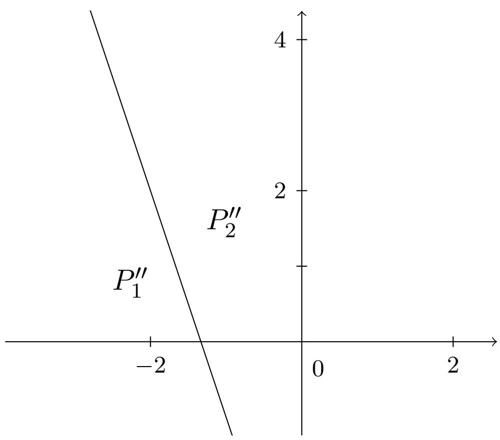
Pour le point $O(0,0)$, l'expression $x+2y-2$ vaut -2. L'expression est donc négative sur P_1 (dont O en fait partie) et positive sur P_2. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $x-2y-2 \leq 0$ est le demi-plan P_2 (positive) avec la droite D (ou nul).

2. La droite D' passe par les points de coordonnées $(0,-6)$ et $(4,-1)$. Elle partage le plan en deux plans P_1' et P_2'.



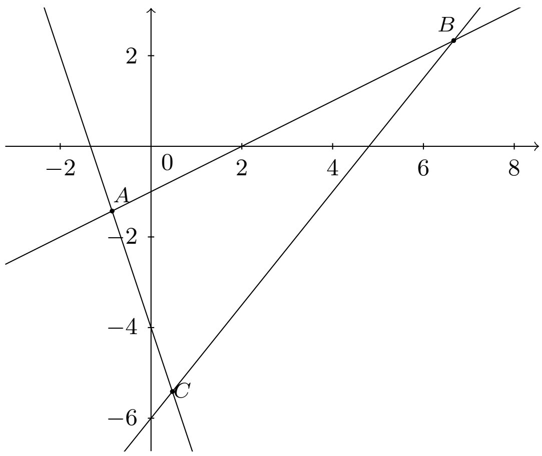
Pour le point $O(0,0)$, l'expression $5x-4y-24$ vaut -24. L'expression est donc négative sur P_1' (dont O fait partie) et positive sur P_2'. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $5x-4y-24<0$ est le demi-plan P_1' (négatif).

3. La droite D'' passe par les points de coordonnées $(-1,-1)$ et $(0,-4)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1'' et P_2''.



Pour le point $O(0,0)$, l'expression $3x + y + 4$ vaut 4. L'expression est donc positive sur P_2'' (dont O fait partie) et négative sur P_1''. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $3x + y + 4 > 0$ est le demi-plan P_2''.

Conclusion. L'ensemble des points solutions du système d'équation est l'intérieur du triangle ABC (avec $A(-6/7, 10/7)$, $B(20/3, 7/3)$ et $C(8/17, -92/17)$) avec le segment $[AB]$ car la première équation est une inéquation large. Il faut donc encore inclure la droite (AB) mais il faut exclure le point A car il ne fait partie de P_2'' et de même il faut exclure B car il ne fait pas partie de P_1'.



4 Applications

4.1 Trois applications avec les polynômes

Exercice 4.1. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b et c tels que (E) s'écrive :
$$(E) : (z-4)(az^2 + bz + c) = 0.$$
2. Résoudre l'équation (E). On notera z_1 sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
3. Démontrer que les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

$\Diamond$ *Solution.* 1. On remplace $z_0 = 4$ dans le membre de gauche de l'équation (E) :

$$4^3 - 8 \times 4^2 + 24 \times 4 - 32 = (64 - 128) + (96 - 32) = -64 + 64 = 0.$$

Ainsi $z_0 = 4$ est une solution de (E). On note $P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$ le polynôme membre de gauche de l'équation (E). Comme $z_0 = 4$ est une racine de P, on peut écrire P sous la forme :

$$P(z) = (z-4)(a^2 + bz + c)$$

avec a, b et c trois nombres réels et a non nul. On développe l'expression proposée :

$$(z-4)(az^2+bz+c) = az^3+bz^2+cz-4az^2-4bz-4c = az^3+(b-4a)z^2+(c-4b)z-4c.$$

On identifie les coefficients de ce polynôme avec le polynôme P originel. Après identification, on se retrouve à résoudre le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -8 \\ c - 4b = 24 \\ -4c = -32 \end{cases}$$

On a directement $a = 1$ et $c = \frac{32}{4} = 8$. D'où :

$$b - 4 \times 1 = -8 \Leftrightarrow b = -8 + 4 \Leftrightarrow b = -4.$$

Ainsi :

$$(E) \Leftrightarrow (z-4)(z^2 - 4z + 8).$$

2. On résout l'équation (E) :

$$(z-4)(z^2 - 4z + 8) = 0.$$

C'est une équation produiit nulle donc soit $z - 4 = 0$ ou soit $z^2 - 4z + 8 = 0$. On a déjà remarqué que $z_0 = 4$ était solution de (E) donc il nous reste à résoudre $z^2 - 4z + 8 = 0$, équation du second degré nulle. On calcule son discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$$

Il y a donc deux solutions complexes conjugués à l'équation. On a de plus : $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$. D'où les solutions de (E) sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= 4 \\ z_1 &= \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 4\mathrm{i}}{2} = 2 + 2\mathrm{i} \\ z_2 &= \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - 4\mathrm{i}}{2} = 2 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

3. On calcule les distances ΩM_0, ΩM_1 et ΩM_2 :

$$\begin{aligned} \Omega M_0 &= |z_\Omega - z_0| = |2 - 4| = |-2| = 2 \\ \Omega M_1 &= |z_\Omega - z_1| = |2 - (2 + 2\mathrm{i})| = |-2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2} = 2 \\ \Omega M_2 &= |z_\Omega - z_2| = |2 - (2 - 2\mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| = 2 \end{aligned}$$

Ainsi M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 appartiennent au cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon $R = 2$.

□

Exercice 4.2. Trouver tous les polynômes $P(x) = ax + b$ tels que :

$$P(P(x)) = x - 1$$

Solution. ◊ Soit $P(x) = ax + b$, on cherche les coefficients a, b et c tels que $R(x) := P(P(x)) = x - 1$:

$$\begin{aligned} P(P(x)) = P(ax + b) &= a(ax + b) + b \\ &= \underbrace{a^2 x + ab + b}_{Q(x)} \end{aligned}$$

On identifie les coefficients de Q à R, on doit ainsi résoudre le système d'éqautions suivants :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ 0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Le deuxième cas est impossible car $0 \neq -1$, d'où la seule solution est $P(x) = -x - \frac{1}{2}$. □

Exercice 4.3 (Interpolation polynômiale).. Trouver une fonction f du second degré dont sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points suivants :

$$(-1; 2)\ ;\ (1/2; -1)\ ;\ (2, 5)$$

♢ *Solution.* Ici, nous avons affaire à une interpolation polynômiale, c'est-à-dire à partir de points de la courbe représentative d'une fonction, trouver un polynôme qui correspond à l'expression algébrique de cette courbe. On doit trouver une fonction f du second degré, cette fonction s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c trois nombres réels, a non nul.

On sait que :

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(1/2) = -1 \\ f(2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 \times a + (-1) \times b + c = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times a + \frac{1}{2} \times b + c = -1 \\ 2^2 \times a + 2 \times b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ \frac{1}{4} \times a + \frac{1}{2} \times b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}$$

Pour se débarasser des fractions à la deuxième ligne, on peut multiplier par 4 le membre de gauche et de droite de l'équation.

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ \frac{1}{4} \times a + \frac{1}{2} \times b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + 2b + 4c = -4 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}$$

Pour résoudre simplement ce système d'équations, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a - b + c = 2 & L_1 \\ a + 2b + 4c = -4 & L_2 \\ 4a + 2b + c = 5 & L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|r} a - b + c = 2 & L_1 \\ 3b + 3c = -6 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2b + c = 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|r} a - b + c = 2 & L_1 \\ 3b + 3c = -6 & L_2 \\ 7c = -7 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, on a : $c = -1$ puis :

$$3b + 3 \times (-1) = -6 \Leftrightarrow 3b = -6 + 3 \Leftrightarrow 3b = -3 \Leftrightarrow b = -1$$

et :

$$a - (-1) - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Ainsi la fonction f polynômliale du second degré qui répond au problème d'interpolation est :

$$f(x) = 2x^2 - x - 1.$$

□

4.2 Un système d'équations en arithmétique

THÉORÈME 4.4. Soit $(n,m) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0,1\})^2$ tel que $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \tag{Σ}$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

Si, de plus, $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une solution particulière de Σ, alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est $\{x_0 + knm,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. $\Diamond$ Soit $x \in (\Sigma)$. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{n} \\ x_0 \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x_0 \equiv x \pmod{n} \\ x_0 \equiv x \pmod{m} \end{cases}$$

Il existe $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nk = x_0 - x$ et $mk' = x_0 - x$. D'après le théorème de Gauss, $n \mid k'$ car $\mathrm{PGCD}(n,m) = 1$. Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = ln$, donc $x_0 - x = lmn$, c'est-à-dire

$$\mathcal{S} \subset \{x_0 + lmn,\ l \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Soit $x = x_0 + lmn$, où $l \in \mathbb{Z}$. On a $x \equiv x_0 \pmod{n}$ et $x \equiv x_0 \pmod{m}$. Ainsi on obtient l'égalité.

Montrons que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} xm \equiv am \pmod{mn} \\ xn \equiv bn \pmod{nm} \end{cases}$$

donc $x(m-n) \equiv am - bn \pmod{nm}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a :

$$\overline{x} \times \overline{m-n} = \overline{am-bn}.$$

Si $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors on a une solution :

$$\overline{x} = \overline{am-bn}\,\overline{m-n}^{-1}$$

puisqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x(m-n) = am - bn + lmn$ donc $m(x-a) = n(-b+km+x)$ donc n divise $x - a$ (car $\mathrm{PGCD}(n,m) = 1$ et $-b + km + x \in \mathbb{Z}$). De façon analogue, $x \equiv b \pmod{m}$.

Montrons que $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(m-n, mn) = 1$. Comme $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$, on a $\mathrm{PGCD}(m-n,n) = 1 = \mathrm{PGCD}(m-n,m)$, d'après le théorème de Bezout. En effet, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + mv = 1$ donc :

$$(m-n)v + (u+v)n = 1$$

donc $\mathrm{PGCD}(m-n,n) = 1$ car $u + v \in \mathbb{Z}$.

Par suite, $\mathrm{PGCD}(m-n,mn) = 1$ car si $d = \mathrm{PGCD}(m-n,mn)$. Soit d' tel que $d' \mid mn$ et $d' \mid m-n$, d est un diiviseur premier de d. Comme $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$, d' divise m ou n (par ex., $d' \mid n$. Or $d' \mid m-n$, donc $d' \mid m$. Ainsi $d' \mid \mathrm{PGCD}(m,n)$ et $d' = 1$ (ce qui est absurde. Comme d n'a pas de diviseur premier, $d = 1$. $\square$

Exemple 4.5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 8 \\ x \equiv 3 \pmod 6 \end{cases}$

Solution. $\Diamond$

1. On multiple la première ligne par 6 et la deuxième par 5 :

$$\begin{cases} 6x \equiv 18 \pmod{30} \\ 5x \equiv 5 \pmod{30} \end{cases}$$

   donc $6x - 5x = x \equiv 13 \pmod{30}$.
   Réciproquement, si $x \equiv 13 \pmod{30}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 13 = 5 \times 6k$ donc $x \equiv 13 \pmod 5$. Or $13 \equiv 3 \pmod 5$, donc $x \equiv 3 \pmod 5$. De plus,

$$x \equiv 13 \equiv 1 \pmod 6.$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv 13 \pmod 5\}$.
2. On arriverait à $x \equiv 6 \pmod{24}$. Réciproquement, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6 = 24k = 8 \times 3k$, donc $x \equiv 6 \pmod 8$ mais $6 \not\equiv 2 \pmod 8$ ou $x \equiv 6 \equiv 0 \pmod 6$ mais $3 \not\equiv 0 \pmod 6$. Il n'y a donc pas de solution.

$\square$

4.3 Introduction à la programmation linéaire

Problème 4.6. Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois. Une table nécessite 3 heures de découpe et 2 heures de finition. Un buffet nécessite $1h30$ de découpage et 6 heures de finition. Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et 78 heures pour la finition. Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et 300 € par buffet.

Déterminer le nombre x de tables et y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

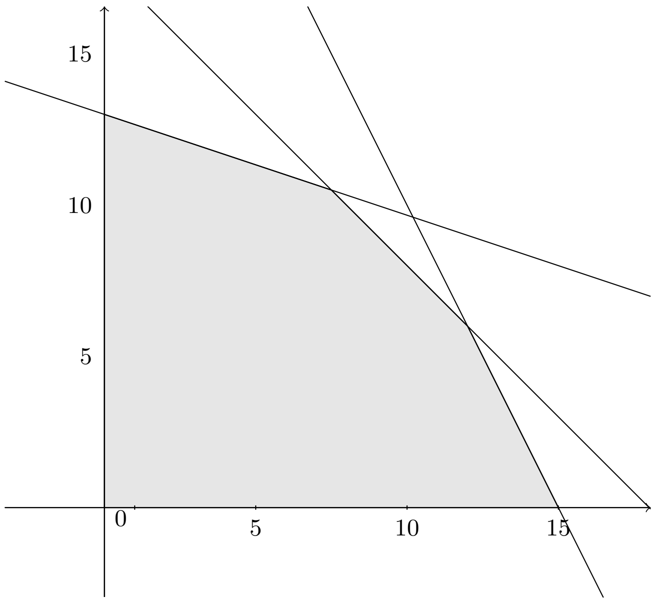
$\Diamond$ Soit x le nombre de tables à produire et y le nombre de buffets à produire.

- La quantité de tables à produire est positive donc $x \geq 0$.
- La quantité de buffets à produire est positive donc $y \geq 0$.
- En un mois, on ne peut produire que 18 meubles donc $x + y \leq 18$.
- En un mois, x est limité à 45 heures de découpage, une table nécessite 3 heures de découpage et un buffet, $1h30$ de découpage donc $3x + 1,5y \leq 45 \Leftrightarrow 6x + 3y \leq 90 \Leftrightarrow 2x + y \leq 30$.
- En un mois, on est limité à 78 heures de finition, une table nécessite 2 heures de finition et un buffet 6 heures de finition. Cela se traduit par l'inégalité $2x + 6y \leq 78 \Leftrightarrow x + 3y \leq 39$.

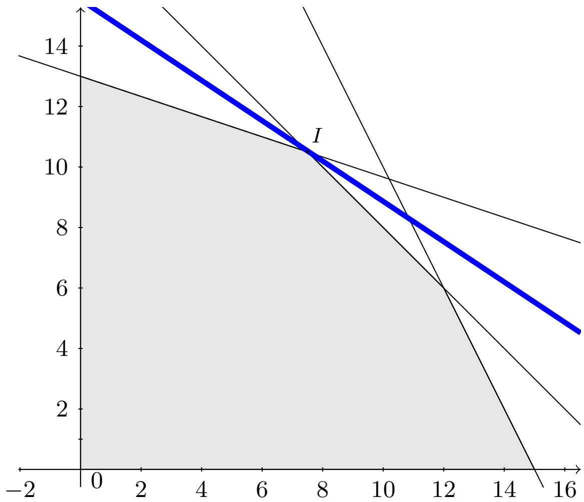
Donc les contraintes de production se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 18 \\ 2x + y \leq 30 \\ x + 3y \leq 39 \end{cases}.$$

On trouve le domaine des contraintes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Le bénéfice B est une fonction de x et y. Elle s'exprime par $B(x, y) = 200x + 300y$.



Graphiquement, le point I du domaine des contraintes pour lequel le bénéfice est maximum est $(7,5; 10,5)$. Le bénéfice maximum est donc : $200 \times 7,5 + 300 \times 10,5 = 4650$.