LEÇON N° 21

Proportionnalité et linéarité. Applications.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de troisième et lycée

Prérequis

Quatre opérations, repérage et vecteurs

Références

— *Chapitre 12 : Proportionnalité*. URL : `http://maths.vivien.free.fr/documents/Cours/chapitre6D1-Proportionnalite.pdf`
— *Chapitre 13 : Proportionnalité*. URL : `www2.ac-lyon.fr/etab/colleges/col-69/jgiono/IMG/pdf/cours_Proportionnalite.pdf`
— *Théorème de Thalès : Démonstration*. URL : `http://mathadoc.sesamath.net/Documents/college/3eme/3thales/demoaire.PDF`.
— S. PASQUET, *Proportionnalité*. Classe de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème. URL : `http://mathweb.fr`.

Table des matières

1 Situation de proportionnalité

1.1 Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition 1.1. Dire que deux grandeurs sont *proportionnelles* revient à dire que les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*

Exemple 1.2. On achète des pommes à la pesée, à 2 € le kilogramme. Dans le tableau ci-dessous, les prix payés obtenus en multipliant les quantités par le même nombre : 2.

Le prix payé est proportionnel à la quantité de pommes achetées. Ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

$\times 2$

PROPOSITION 1.3. On peut également reconnaître un tableau de proportionnalité si les deux lignes d'une même colonne sont obtenues en multipliant par un même nombre les deux lignes d'une autre colonne.

$\times \frac{4}{3}$

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

1.2 Compléter un tableau de proportionnalité : la quatrième proportionnelle

Définition 1.4. Un tableau de proportionnalité étant donné, si l'on connaît trois des nombres de deux colonnes du tableau alors on peut déterminer le quatrième. Ce quatrième nombre est alors appelé quatrième proportionnelle.

Exemple 1.5. Un morceau de tissu de 3 mètres de long est vendu 25 €. Comment calculer le prix de 7 mètres de ce même tissu ?

◊

Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	x €

On veut savoir tout d'abord quel est le prix au mètre du tissu.

$\div 3$ $\times 7$

Longueur	3 m	1 m	7 m
Prix	25 €	$\frac{25}{3}$ €	x €

Pour 1 mètre de tissu, on paie 3 fois moins cher qu'avec 3 mètres, donc on paie $\frac{25}{3}$ soit environ $8,33$ €.

Pour 7 mètres de tissu, on paie 7 fois plus cher qu'avec 1 mètre, donc on paie $\frac{25}{3} \times 7 = \frac{175}{3}$ € soit environ $58,33$ €.

◊ On développe deux autres méthodes pour parvenir à nos fins.

1. 7 mètres est égal à $\frac{7}{3}$ de 3 mètres. Le prix pour 7 mètres est donc égal aux $\frac{7}{3}$ du prix pour 3 mètres.

   $\times \frac{7}{3}$

Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	x €

   $\frac{7}{3} \times 25 = \frac{175}{3}$. Donc le prix de 7 mètres de tissu est égal à environ $58,33$ €.

2.

Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	? €

   $\times \frac{25}{3}$

   25 est égal à $\frac{25}{3}$ de 3.

   $$\frac{25}{3} \times 7 = \frac{175}{3}.$$

   Or $\frac{175}{3} \approx 58,33$ donc le prix de 7 mètres de tissu est égal à environ $58,33$ €.

Conséquence 1.6 (Le produit en croix).

Nb. de baguettes	5	x
Prix en €	$4,25$	$2,55$

Le coefficient de proportionnalité est égal à $\frac{4,25}{5}$. Mais il est aussi égal à $\frac{2,55}{x}$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{4,25}{5} &= \frac{2,55}{x} \\ 4,25 \times x &= 5 \times 2,55 \\ x &= \frac{5 \times 2,55}{4,25} = 3. \end{aligned}$$

1.3 Exemples de situations de proportionnalité

1.3.1 Les pourcentages

Définition 1.7. Un *pourcentage* traduit une situation de proportionnalité, il est égal au coefficient de proportionnalité de la situation dont le dénominateur vaut 100.

Exemple 1.8. Une usine fabrique du chocolat noir. Leurs tablettes de 250 g contiennent 180 g de cacao. Quel est le pourcentage de cacao dans la tablette ?

◊

Chocolat en g	250	100
Cacao en g	180	x

$\times \frac{18}{25}$

$$\frac{180}{250} = \frac{x}{100}$$

donc $x = 72$. Dans une tablette de chocolat noir, il y a donc 72 g de cacao sur 100 g de chocolat donc il y a 72% de cacao dans le chocolat noir.

1.3.2 Les échelles

Un élève souhaite dessiner son bureau sur lequel il travaille, mais il souhaite respecter les proportions. Les dimensions réelles du bureau doivent donc être proportionnelles aux dimensions du bureau dessiné.

PROPOSITION 1.9. Le coefficient de proportionnalité par lequel il faut multiplier les dimensions réelles pour obtenir les dimensions mesurées sur le plan, exprimées dans la même unité, est appelée *échelle du plan*.

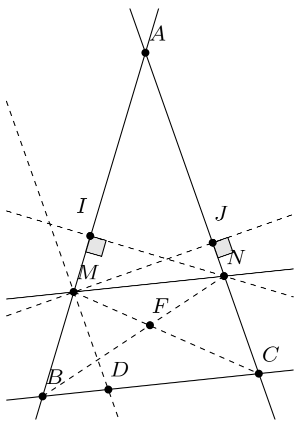
Notation : Si 1 cm sur le plan représente 300 m en réalité alors l'échelle est $1 : 30000$.

1.3.3 Théorème de Thalès

THÉORÈME 1.10. Soit deux droites d et d' sécantes en un point A; B et M deux points de d distinct de A et C et N deux points de d' distinct de A (A, B et M alignés dans le même ordre que A, C et N). Alors :

$$(BC)//(MN) \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Démonstration. $\Diamond$



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathcal{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathcal{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathcal{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathcal{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathcal{A}(MFB) = \mathcal{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(BMF) + \mathcal{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CMN) = \mathcal{A}(CFN) + \mathcal{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

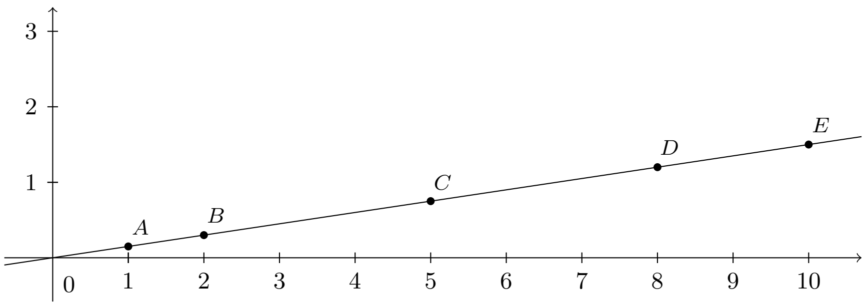
d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. $\square$

2 Représentation graphique

Exemple 2.1.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$

Le graphique suivant représente le prix payé en fonction du nombre de SMS envoyé :



PROPRIÉTÉ 2.2. Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les points de la représentation graphique des valeurs d'une grandeur en fonction des valeurs de l'autre grandeur sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

3 Proportionnalité et fonctions linéaires

Exemple 3.1. Reprenons l'exemples des SMS.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$

$\times 0.15$

Le coefficient de proportionnalité vaut $0,15$ donc si on envoie x SMS, le prix à payer $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS envoyés sera de $f(x) = 0,15 \times x$.

Définition 3.2. On se donne un réel a. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre ax est appelé *fonction linéaire* de coefficient directeur a.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f\colon x \mapsto ax$.

Le nombre $f(x) = ax$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

PROPRIÉTÉ 3.3. La représentation graphique d'une fonction linéaire f de coefficient directeur a est une droite passant par l'origine du repère et par le point $(1, a)$.

Une équation de cette droite est $y = f(x)$.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Démonstration. $\diamondsuit$ On considère le cas où $a > 0$.

$f(0) = 0$ et $f(1) = a$ donc la courbe passe bien par ces deux points. Soit x un réel non nul, considérons alors les points $O(0; 0)$, $A(1; a)$, $A'(1; 0)$, $B(x, y)$, $B'(x; 0)$ sont tels que B appartienne à la droite passant par O et par A.

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles donc on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OBB'. On a : $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$. Les triangles OAA' et OBB' sont rectangles donc on peut appliquer Pythagore pour déterminer les longueurs OA et OB :

$$OB^2 = OB'^2 + BB'^2 = x^2 + y^2$$
$$OA^2 = OA'^2 + AA'^2 = 1 + a^2.$$

D'où :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{x} = \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{1+a^2}{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1+a^2}{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2(1+a^2) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2a^2 \Leftrightarrow y = ax$$

car si $y = -ax$, les points O, A et B ne seraient pas alignés. $\square$

PROPRIÉTÉ 3.4. Si deux grandeurs sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité a, alors l'une est fonction linéaire de l'autre et le coefficient de proportionnalité a de la situation de proportionnalité est égal au coefficient directeur de la fonction linéaire associée.

Réciproquement à toute fonction linéaire correspond une situation de proportionnalité.

4 Proportionnalité et fonctions affines

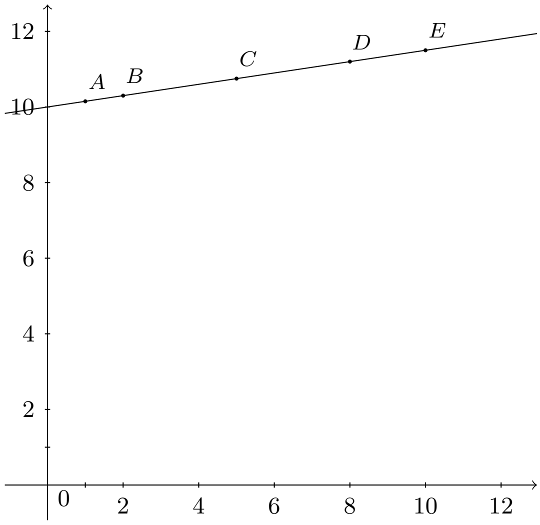
Exemple 4.1. Un abonnement de téléphone coûte 10 € et avec cet abonnement, on peut payer 100 SMS.

Si on envoie plus de 100 SMS, le coût du SMS supplémentaire est de $0,15$ €.

Nb de SMS supplémentaires	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$10,15$	$10,30$	$10,75$	$11,20$	$11,50$

On ne se trouve donc plus dans une situation de proportionnalité car pour 1 SMS supplémentaire, on paie $10,15$ € et pour 2 SMS, on paie $10,30$ €. Or, $10,30 \neq 2 \times 10,15$.

On a la représentation graphique suivante :



On remarque cependant que les points sont toujours alignés sur une droite ne passant pas par l'origine.

Exprimons le prix payé $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS supplémentaires envoyés : l'abonnement coûte 10 euros auquel on doit rajouter le nombre de SMS supplémentaires envoyé multiplié par le prix d'un SMS :

$$f(x) = 0,15 \times x + 10.$$

Définition 4.2. Soient a et b deux réels. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $ax + b$ est appelé fonction affine.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f : x \mapsto ax + b$.

Le nombre $f(x) = ax + b$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

PROPRIÉTÉ 4.3. L'image de 0 par f est b, b est alors appelé *ordonnée à l'origine* de la fonction affine f.

a est le *coefficient directeur* de la fonction affine f.

PROPRIÉTÉ 4.4. La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite D passant par le point $(0, b)$ et parallèle à la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto ax$.

Une équation de D est $y = ax + b$.

Réciproquement, toute droite du plan est la représentation graphique d'une fonction affine.

Démonstration. $\diamondsuit$ Pour montrer que la courbe représentation d'une fonction affine est une droite, on fait la même preuve que pour les fonction linéaires non pas en considérant la droite $y = 0$ mais la droite parallèle à celle-ci et d'équation $y = b$.

On montre maintenant le parallélisme entre une droite représentation une fonction linéaire et une droite représentant une fonction affine et non linéaire. Si les droites n'étaient pas parallèles, il existerait un point A appartenant à d_f et à d_g donc ses coordonnées seraient (x, ax) et $(x, ax + b)$ donc $b = 0$ impossible. Donc les droites sont parallèles. $\square$

PROPRIÉTÉ 4.5. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Il y a proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et les accroissements de x.

Démonstration. $\diamondsuit$

$$f(x) - f(y) = ax + b - (ay + b) = a(x - y).$$

$\square$

Exemple 4.6. Si on reprend l'exemple des SMS, on a $f(x) = 0,15 \times x + 10$ et on a le tableau suivant :

Nombre de SMS supplémentaire x	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$10,15$	$10,30$	$10,75$	$11,20$	$11,50$

À partir de ce tableau, on peut remplir celui-ci :

Acc. de x	$2-1=1$	$5-2=3$	$10-8=2$
Acc. de $f(x)$	$10,3-10,15=0,15$	$10,75-10,3=0,45$	$11,5-11,2=0,3$

$\times 0.15$

On a alors le coefficient de proportionnalité qui est égal à a.

5 Applications

5.1 Application 1

Le PIB d'un payé est passé de 6700 à 7500 milliards de dollars U.S., puis a augmenté de 8%, puis est passé de l'indice 100 à l'indice 103, puis a augmenté de 457 milliards de dollars.

Calculer chacune de ces évolutions par un coefficient multiplication, et calculer le PIB final de ce pays.

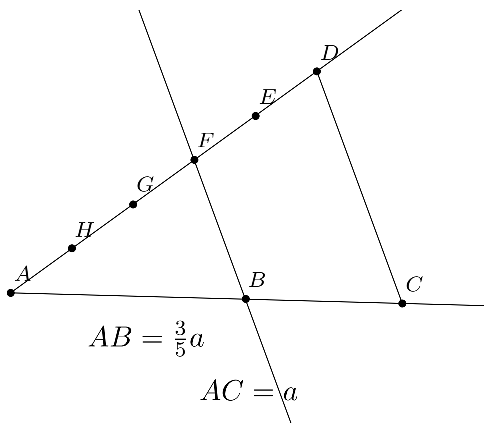
En déduire le pourcentage global d'évolution.

5.2 Application 2 : construction à la règle et au compas

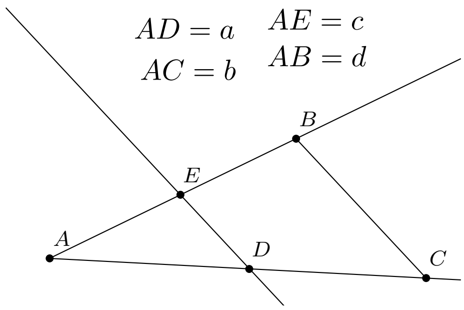
1. Étant donné une longueur a, construire $\frac{3}{5}a$.
2. Étant donné trois longueurs a, b et c, construire la longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
3. Étant donné deux longueurs a et b, construire la longueur c telle que $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$.

$\Diamond$

1.



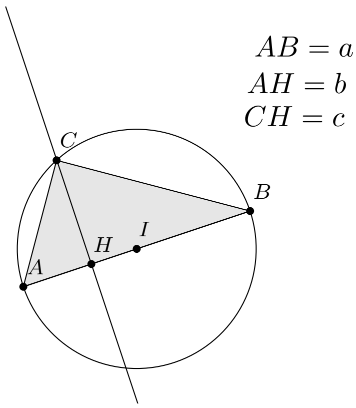
2.



3. Soit ABC un triangle quelconque et soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A avec (BC), alors on a $2\mathcal{A}(ABC) = AB \cdot AC = BC \cdot AH$, d'où :

$$\begin{aligned}
AB \cdot BC = BC \cdot AH &\Leftrightarrow AB^2 \cdot AC^2 = BC^2 \cdot AH^2 \\
&\Leftrightarrow (BH^2 + AH^2)(HC^2 + AH^2) = (BH + CH)^2 \cdot AH^2 \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow BH^2 \cdot HC^2 + AH^4 = 2AH^2 \cdot BH \cdot CH \\
&\Leftrightarrow BH^2 \cdot HC^2 + AH^4 - 2AH^2 \cdot BH \cdot CH = 0 \\
&\Leftrightarrow (BH \cdot CH - AH^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow BH \cdot CH = AH^2.
\end{aligned}$$

Or si $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ alors $ab = c^2$. Supposons $a > b$, il suffit donc de construire un segment $[AB]$ de longueur a, un point $H \in [AB]$ tel que $AH = b$. Ensuite, on trace le cercle de diamètre $[AB]$ et de tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par H pour créer un point C sur le cercle tel que ABC rectangle en C, la longueur CH sera alors égal à c.



5.3 Application 3 : Agrandissement, réduction

PROPRIÉTÉ 5.1. Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2, les volumes par k^3.

Exemple 5.2. Des ingénieurs ont construit une maquette au $1 \ : \ 5000$ d'un bassin de retenue. La maquette mesure $1,60$ m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est 80 dm^2. Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ? Quelle sera en km^2 sa surface ? Quel sera, en million de m^3, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Définition 5.3. On se place dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit H et M deux points du plan et k un réel non nul. La transformation qui envoie le point M sur le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ est appelée homothétie de centre H et de rapport k.

5.4 Application 4 : π

Définition 5.4. On définit le nombre π comme étant le rapport du périmètre de tout cercle divisé par son diamètre.