LEÇON N° 18

Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Transversal

Prérequis

Notions de proportionnalité, géométrie vectorielle

Références

— E. SUQUET, *Théorème de Thalès*. Troisième. URL : `http://automaths.com/3/cours/3_Thales_C.pdf`.
— UNKNOWN, *Propriété de Thalès*. Troisième. URL : `http://melusine.eu.org`.
— UNKNOWN, *Théorème de Thalès - Démonstration*. URL : `http://mathadoc.com`.
— J. HAMON, *Leçon 24 : Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.* URL : `http://jaimelesmaths.voila.net/Capes/Lecon_24.pdf`.
— C. BOULONNE, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2013.
— C. PARFENOFF, *Colinéarité de deux vecteurs*. Première S. URL : `http://www.parfenoff.org/pdf/1re_S/geometrie/1re_S_colinearite_de_2_vecteurs.pdf`.
— Collège THÉROUANNE, *Echelles et mouvement uniforme*. URL : `http://www.college-therouanne.net/vie_au_college/les_cours/math/cours5/echelle_mvt_uniforme.pdf`.
— KB, *Homothéties*. URL : `http://labomath.free.fr/faidherbe/permS/vecteur/homothetie.pdf`.

Table des matières

1 Proportionnalité : définition

Définition 1.1. Dire que deux grandeurs sont *proportionnelles* revient à dire que les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*

Exemple 1.2. On achète des pommes à la pesée, à 2 € le kilogramme. Dans le tableau ci-dessous, les prix payés obtenus en multipliant les quantités par le même nombre : 2.

Le prix payé est proportionnel à la quantité de pommes achetées. Ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

$\times 2$

PROPOSITION 1.3. On peut également reconnaître un tableau de proportionnalité si les deux lignes d'une même colonne sont obtenues en multipliant par un même nombre les deux lignes d'une autre colonne.

$\times \frac{4}{3}$

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

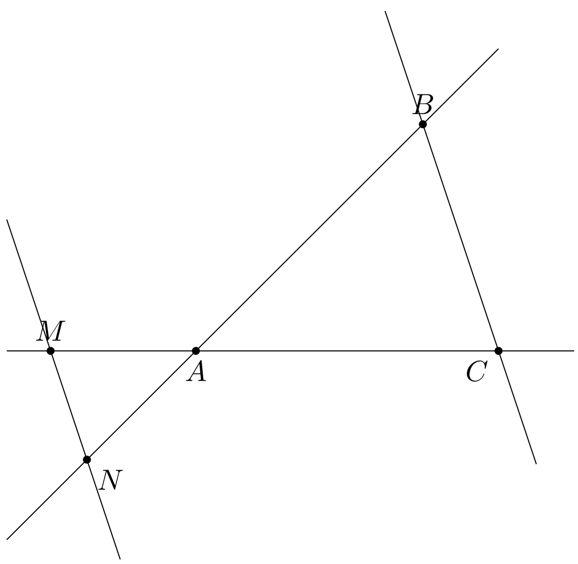
2 Théorème de Thalès

2.1 Le théorème de Thalès

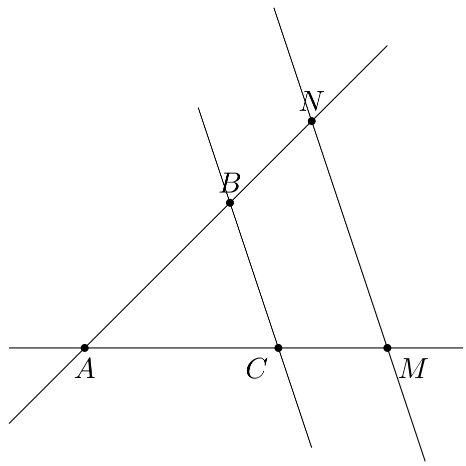
THÉORÈME 2.1. Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites parallèles (de telle façon que l'on ait deux triangles), alors le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit.

Deux configurations possibles :

1.



2.



$\lozenge$

Égalité entre rapport de longueurs. Comme AMN est un agrandissement de ABC alors :

— AM est un agrandissement de AB ;
— AN est un agrandissement de AC ;
— MN est un agrandissement de BC.

Dit d'une autre façon, on peut trouver un nombre $k > 1$ tel que :

— $AM = kAB$;
— $AN = kAC$;
— $MN = kBC$.

On a donc :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k.$$

$\square$

Résolution type brevet. Si :

— $(MN)//(BC)$;
— les points A, B, M sont alignés ;
— les points A, C, N sont alignés.

Alors, je peux appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN :

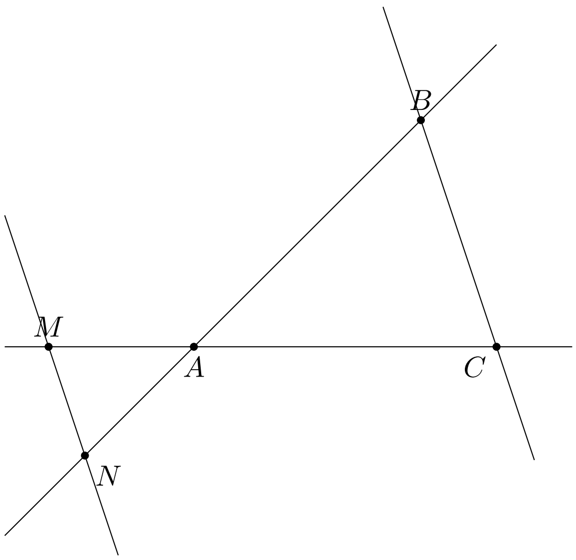
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

$\square$

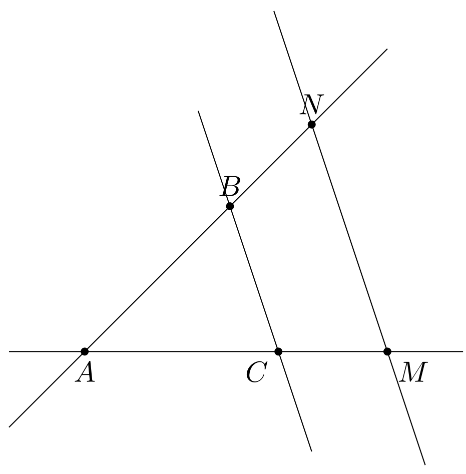
2.2 Réciproque du théorème de Thalès

THÉORÈME 2.2. Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.

1.



2.



Pour vérifier que AMN est un agrandissement de ABC, il faut montrer qu'il existe un nombre k tel que :

— $AM = kAB$;

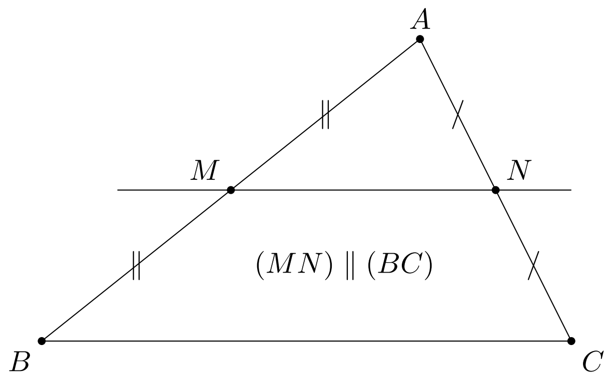
— $AN = kAC$;
— $MN = kBC$.

Remarque 2.3. On peut montrer que dans la configuration où nous sommes, il suffit de montrer qu'il existe un nombre k tel que $AM = kAB$, $AN = kAC$ pour conclure que AMN est un agrandissement de ABC.

Rédaction type brevet. $\Diamond$
— Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
— Si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre
alors on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(MN)//(BC)$. $\square$

2.3 Un cas particulier : le théorème de la droite des milieux

THÉORÈME 2.4. Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors, elle coupe le troisième côté en son milieu.



THÉORÈME 2.5. Dans un triangle, si une droite passe par le milieu de deux côtés aalors elle est parallèle au troisième côté.

THÉORÈME 2.6. Dans les deux configurations précédentes, on a $MN = \frac{1}{2}BC$.

2.4 Agrandissement / réduction d'une figure

Définition 2.7. Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ toutes les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$, on obtient une figure $\mathcal{F}'$ qui est :

1. un agrandissement de $\mathcal{F}$ si $k > 1$;
2. une réduction de $\mathcal{F}$ si $0 < k < 1$.

Le nombre k est appelé le facteur d'agrandissement ou de réduction.

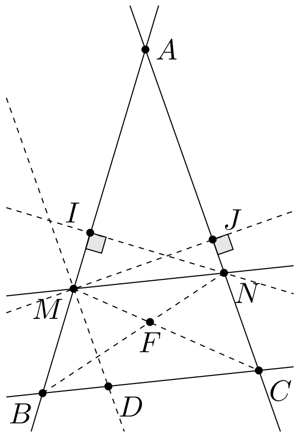
Remarque 2.8. Dans la section précédente, le triangle ABC est un agrandissement de AMN de facteur 2.

PROPRIÉTÉ 2.9. Dans un agrandissement ou une réduction :
— les mesures d'angles sont conservées ;
— les droites parallèles restent parallèles ;
— les droites perpendiculaires restent perpendiculaires ;
— les aires sont multipliés par k^2 ;
— les volumes sont multipliés par k^3.

2.5 Démonstration du théorème de Thalès

2.5.1 Une démonstration due à Euclide

Démonstration. $\Diamond$



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathcal{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathcal{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathcal{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathcal{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathcal{A}(MFB) = \mathcal{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(BMF) + \mathcal{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CMN) = \mathcal{A}(CFN) + \mathcal{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. $\square$

2.5.2 Preuve purement vectorielle

Démonstration. $\Diamond$ Il faut se poser la question de la validité d'une démonstration vectorielle du théorème de Thalès. En effet, la géométrie vectorielle s'appuis souvent sur une définition géométrique des vecteurs, définition dans laquelle le théorème de Thalès joue un rôle prépondérant quand il s'agit d'affirmer que $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Mais on peut toutefois s'intéresser à une écriture possible du théorème de Thalès et sa justification grâce aux opérations vectorielles. Ce qui pourrait permettre de généraliser le théorème de Thalès à tout espace affine euclidien associé à un espace vectoriel.

Dire que D est sur (AB), c'est écrire qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$.

De même, dire que E est sur (AC), c'est écrire qu'il existe un réel y tel que $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AC}$.

Enfin, dire que les droites (ED) et (BC) sont parallèles, c'est écrire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{BC}$.

Les égalités précédentes et la relation de Chasles permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} y\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} \\ y(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\ y\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} &= x\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

L'écriture suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ se doit être unique car ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $y = x$ et $y = t$. On obtient donc les trois égalités :

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{BC}.$$

L'avantage de cet énoncé et de cette démonstration est que cela n'oblige pas à traiter les différents cas de configuration évoqués plus haut. $\square$

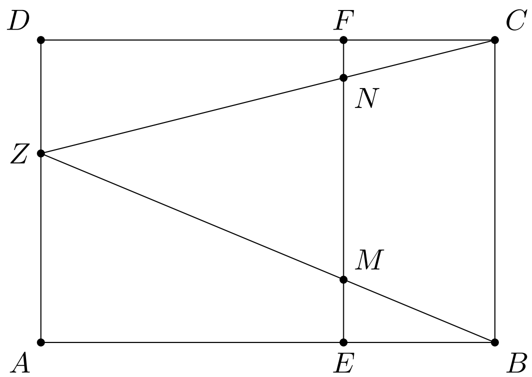
2.6 Exemples et applications

2.6.1 Une longueur constante

Soit $ABCD$ un rectangle. On construit le point E sur le segment $[AB]$ et F sur le segment $[CD]$ tel que $(EF)//(BC)$.

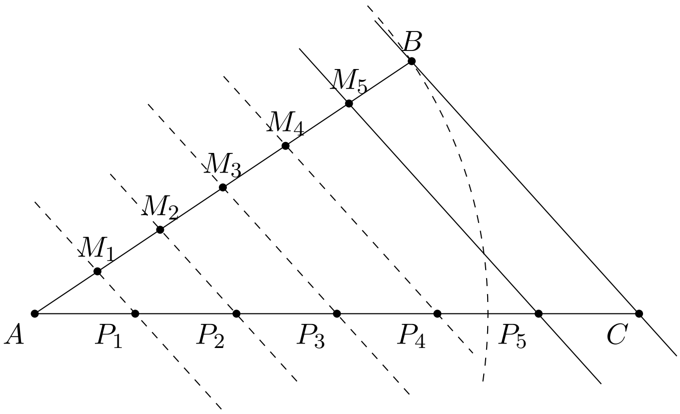
Soit $Z \in [DA]$. Le segmenet $[ZB]$ coupe le segment $[EF]$ en un point M et le segment $[ZC]$ coupe le segment $[EF]$ en un point N.

Montrer que $MN = \text{cst}$.



2.6.2 Découper un segment de longueur donné en n segments de même longueur

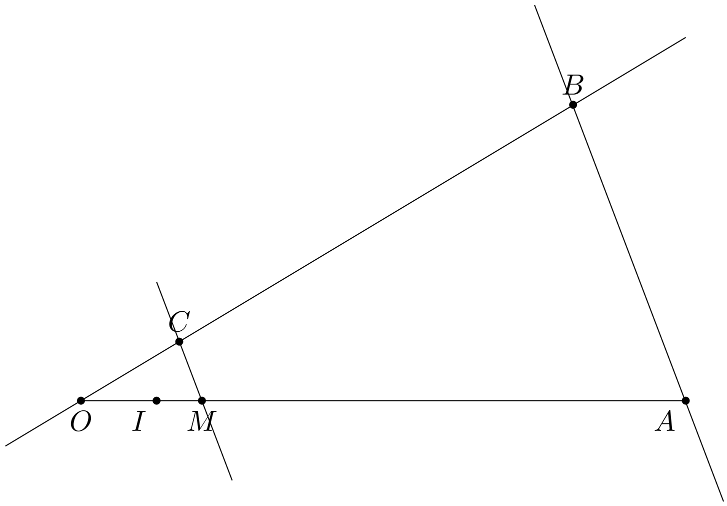
Soit $[AC]$ un segment de longueur 8. On veut découper ce segment en 6 segments de même longueur. Pour cela, on trace un cercle de centre A et de rayon 6. Soit B sur le cercle, on découpe le segment $[AB]$ en segment de 1 cm et ensuite on trace des parallèles à (BC) pour avoir le découpage du segment $[AC]$ en 6 segments de même longueur.



2.6.3 Construire à la règle et au compas une fraction

On considère un axe tel que $OI = 1$. Construire M tel que $OM = \frac{a}{b}$.

Démonstration. $\diamondsuit$



On place A tel que $OA = a \times OI$.

Soit C un point de d'. On place B tel que $OB = bOC$.

La droite parallèle à (AB) couple l'axe en M tel que

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{b}.$$

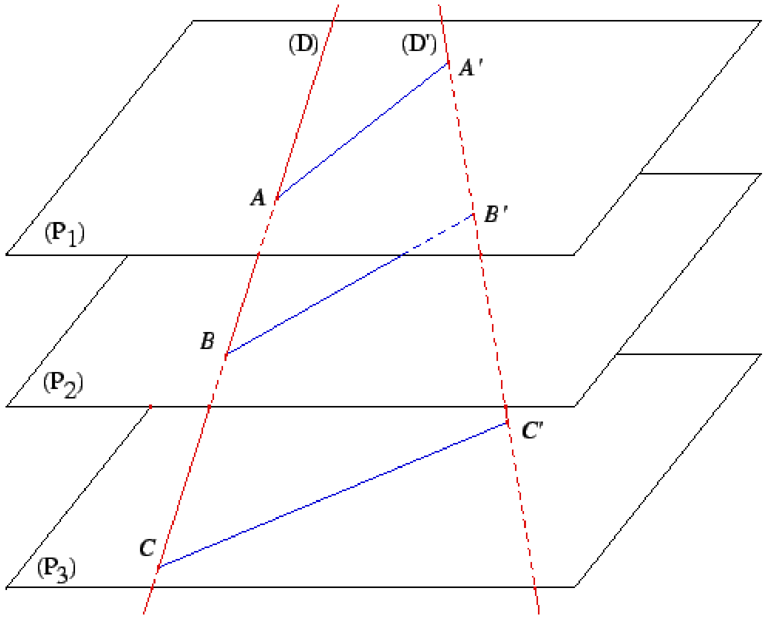
D'où

$$OM = \frac{1}{b}OA = \frac{a}{b}OI = \frac{a}{b}.$$

$\square$

2.7 Théorème de Thalès dans l'espace

On considère la figure suivante :



Théorème 2.10 (Théorème de Thalès dans l'espace). Si les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont parallèles alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Démonstration. ◊ On considère la parallèle à D passant par A' puis on applique le théorème de Thalès deux fois. □

Théorème 2.11 (Première réciproque du thm de Thalès dans l'espace). Soient A, B et C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$, on suppose que ces 6 points sont deux à deux distincts. Alors si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à un même plan.

Démonstration. ◊ On introduit les plans parallèles $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ passant respectivement par A, B et C et de vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. $\mathcal{P}_A$ contient $\overrightarrow{AA'}$, $\mathcal{P}_B$ contient $\overrightarrow{BB'}$ et $\mathcal{P}_C$ coupe $\mathcal{D}'$ en un point C''. Le théorème de Thalès (sens direct) entraîne que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}.$$

Or, par hypothèse, on a : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc $C'' = C'$.

Le plan $\mathcal{P}_C$ contient donc $\overrightarrow{CC'}$ et ainsi (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à un même plan (car les trois plans étaient supposés parallèles. □

Théorème 2.12 (Seconde réciproque du thm de Thalès dans l'espace). Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ trois droites distinctes. Trois plans distincts $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ coupent $\mathcal{D}$ respectivement en A, B, C, coupent $\mathcal{D}'$ respectivement en A', B', C' distincts et coupent $\mathcal{D}''$ respectivement en A'', B'', C'' distincts. On suppose que C, C' et C'' ne sont pas alignés.

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}}$ et si $\mathcal{P}_A$ est parallèle à $\mathcal{P}_B$ alors $\mathcal{P}_C$ est parallèle à $\mathcal{P}_A$ et à $\mathcal{P}_B$.

Démonstration. $\diamondsuit$ Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par C est parallèle à $\mathcal{P}_A$ et à $\mathcal{P}_B$. Il coupe $\mathcal{D}'$ en Q et $\mathcal{D}''$ en R de sorte qu'on puisse utilise le théorème de Thalès (sens direct) aux trois plans parallèles $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}$. On obtient l'égalité :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'Q}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''R}}$$

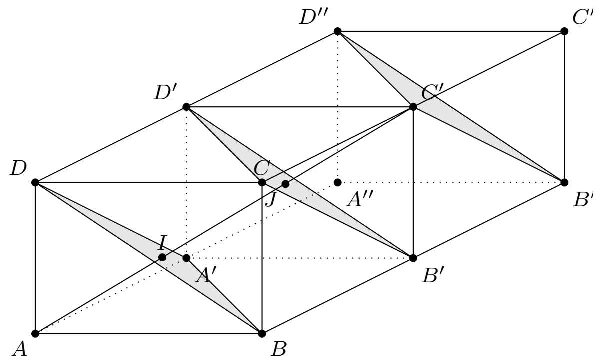
ce qui entraîne avec les hypothèses que $Q = C'$ et $R = C''$ et ainsi $\mathcal{P} = \mathcal{P}_C$.

Les plans $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ sont parallèles. $\square$

Exercice 2.13. Soit $ABCDA'B'C'd'$ un parallélépipède rectangle de l'espace, le rectangle $A'B'C'D'$ étant le translaté du rectangle $ABCD$ par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Montrer que $(A'BD)$ et $(B'D'C)$ sont parallèles.

Ces deux plans coupent respectivement la grande diagonale (AC') en I et J. En utilisant le théorème de Thalès dans l'espace, montrer que I et J sont situés au $1/3$ et au $2/3$ de $[AC']$.

$\diamondsuit$ *Solution.* En utilisant le fait qu'on travaille avec des rectangles, il est facile de montrer que $(BCD)//(B'C'D')$. On considère la figure suivante (les points A'' (resp. B'', C'' et D'') s'obtiennent en faisant une symétrie centrale du point A (resp. B, C et D) par rapport au point A' (resp. B', C' et D').



Pour les mêmes raisons, $(D''C'B'')//(B'D'C)//(A'BD)$. On note I' le point d'intersection entre $(A'DB)$ et (AD'). On constate que I' est le centre du rectangle $AA'D'D$ donc $\frac{\overline{AD'}}{\overline{AI'}} = 2$.

Le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AI'}} = 2 \Rightarrow \overline{AJ} = 2\overline{AI}.$$

Il reste à montrer que $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC'}$.

On note I'' le point d'intersection entre $(A'DB)$ et (AD''). Le théorème de Thalès nous donne : $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}}$. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$. En fait, I'' appartient à la droite $(A'D)$ et à la droite (AD''). On a :

$$A(0;0;0)\ ;\ A'(0;0;1)\ ;\ D(0;1;0)\ ;\ B''(0;1;2)\ ;\ \overrightarrow{A'D}(0;1;-1)\ ;\ \overrightarrow{AD''}(0;1;2)$$

$$(A'D) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$(AD'') : \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{2}$$

On tire de (1) que $x = 0$ et $y + z = 1$ et de (2) que $z = 2y$.

Ainsi $x = 0$, $3y = 1$ soit $y = \frac{1}{3}$ et donc $z = \frac{2}{3}$. On a ainsi :

$$I''(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{AI''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD''}.$$

Alors $\frac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}} = 3$. Comme $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}}$, on en déduit $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = 3$ soit $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC'}$.

Conclusion : $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ et $\overline{AJ} = 2\overline{AC'}$. □

2.8 D'autres théorèmes de géométrie en rapport avec le théorème de Thalès

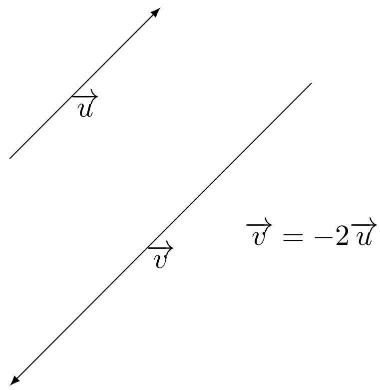
Voir la section 33.5 de la leçon 33 : Théorème de Thalès de C. BOULONNE, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2013.

3 Colinéarité de deux vecteurs

3.1 Propriété caractéristique

Définition 3.1. Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemple 3.2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$.



Remarques 3.3. — Deux vecteurs non nuls sont colinéaires, si et seulement si, ils ont la même direction.
— Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemples 3.4. ◊

1. $\vec{u}(\frac{1}{3}; -\frac{3}{5})$ et $\vec{v}(\frac{2}{9}; -\frac{1}{5})$ sont colinéaires, en effet :

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{-3}{5},$$

donc $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$.

2. $\vec{u}(4; 5)$ et $\vec{v}(8; -10)$ ne sont pas colinéaires car $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ alors $8 = \lambda \times 4$ donc $\lambda = 2$ et $-10 = \lambda \times 5$ donc $\lambda = -2$. C'est absurde ! Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

PROPRIÉTÉ 3.5. Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

Exemples 3.6. $\lozenge$

1. On veut montrer que $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(10;-15)$ sont colinéaires.

$$2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. On veut montrer que $\vec{u}(7;-4)$ et $\vec{v}(14;8)$ ne sont pas colinéaires.

$$7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Démonstration. $\lozenge$ Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors, par hypothèse, il existe un réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, cela se traduit sur les coordonnées par : $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. D'où :

$$xy' - yx' = x\lambda y - y\lambda x = \lambda xy - \lambda xy = 0.$$

Si l'un des vecteurs est nul alors la relation est clairement vérifiée.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\vec{u}$ non nul, l'une de ses coordonnées est donc non nulle.

— Si $x \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire : $y' = \frac{x'}{x}y$, c'est-à-dire $y' = \lambda y$ avec $\lambda = \frac{x'}{x}$. Et comme $\frac{x'}{x} \times x = x'$, on a aussi $x' = \lambda x$. Donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{v}(\lambda x; \lambda y)$, on a donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

— Si $y \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire $x' = \frac{y'}{y} \times x$ et on reprend le même raisonnement que plus haut.

On peut aussi supposer que $\vec{u}$ est nul alors $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

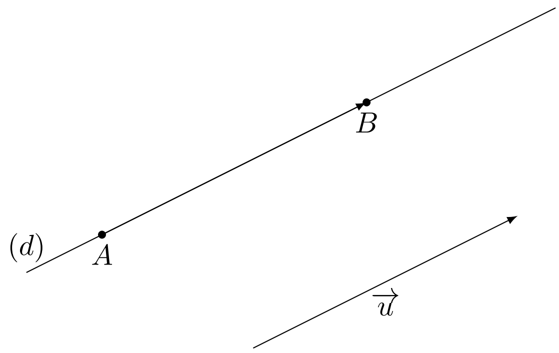
$\square$

Remarque 3.7. $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ ne sont pas colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' \neq 0$.

3.2 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 3.8. On dit que $\vec{u}$ (vecteur non nul) est un *vecteur directeur* d'une droite (d) s'il exist deux points distincts A et B de cette droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple 3.9. A et B sont sur la droite (d), $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



THÉORÈME 3.10. Soit (d) une droite et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). Soit $\vec{v} \neq 0$ un vecteur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d).

L'ensemble des vecteurs directeurs de (d) est $\left\{\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},\ \exists k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}\right\}$.

Exemple 3.11. $\diamondsuit$ Le vecteur $\vec{u}(-2;3)$ est un vecteur directeur de la droite (d) dont une équation cartésienne est $3x+2y+5=0$.

Le vecteur $\vec{v}(-8;12)$ est colinéaire au vecteur (en effet, $\vec{v}=3\vec{u}$). Alors $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d).

Les vecteurs directeurs de (d) sont de la forme ; $(-2k;3k)$ avec $k\in\mathbb{R}^*$.

Conséquence 3.12. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de deux droites (d) et (d'). Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

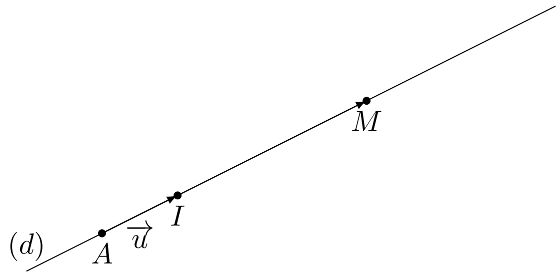
Exemple 3.13. $\diamondsuit$ Soit (d) la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-3;8)$ et (d') la droite de vecteur directeur $\vec{v}(6;-16)$. On veut montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

On remarque que $\vec{v}=-2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

PROPRIÉTÉ 3.14. A, B et C sont trois points alignés si et seulement si deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ 3.15. (d) est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. La droite (d) est l'ensemble des points M du plan, tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration. $\diamondsuit$



Soit I le point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AI}=\vec{u}$. M appartient à la droite (d), si et seulement si, les points A, I et M sont alignés. Or A, I et M sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Comme $\overrightarrow{AI}=\vec{u}$ alors A, I et M sont alignés si et seulement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

On a démontré que M appartient à la droite (d) si, et suelement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. $\square$

4 Echelles et plans

Définition 4.1. L'*échelle* du plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances réelles et les distances mesurées sur la plan exprimées dans les mêmes unités de longueur.

Distance réelle (en cm)		
Distance sur le plan (en cm)		

$\times$échelle

On peut ainsi calculer l'échelle en divisant le nombre d'en bas par le nombre d'en haut.

$$\boxed{\text{L'échelle} = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}}$$

Exemple 4.2. Sur un plan, on lit « échelle $\frac{1}{100000}$ ». C'est le plus souvent par une fraction de numérateur 1 que s'expriment les échelles d'une carte. Cela signifie que les distances réelles sont multipliées par $\frac{1}{100000}$ pour obtenir les distances sur la carte. Ce qui signifie que 1 cm sur la carte représente 100000 cm dans la réalité.

Distance réelle (en cm)	100000	
Distance sur le plan (en cm)	1	

$\times \frac{1}{100000}$

On convertira la distance réelle en km, 100000 cm = 1 km donc 1 cm sur la carte représente 1 km dans la réalité.

Comment trouver l'échelle du plan ?

Exemple 4.3. Sur une carte, la distance entre Paris et Lyon est de 20 cm. À vol d'oiseau, il y a 400 km. Quelle est l'échelle du plan ?

On convertit 400 km en cm : $400 \times 100000 = 40000000$ et on dresse le tableau de proportionnalité suivant :

Distance réelle (en cm)	40000000	?
Distance sur le plan (en cm)	20	1

Le coefficient de proportionnalité peut être calculé de la manière suivante :

$$\frac{40000000}{20} = 2000000 \text{ cm}$$

Donc, la carte est à l'échelle $\frac{1}{2000000}$.

5 Homothéties

5.1 Définition

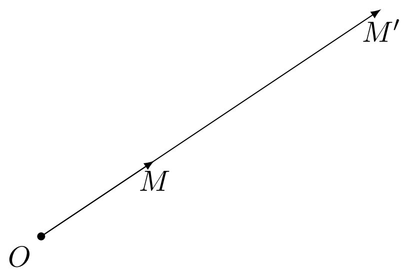
Définition 5.1. Soit O un point, k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre O et de rapport k, la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarque 5.2. Si on note h l'homothétie de centr O et de rapport k, les énoncés suivants sont équivalents :

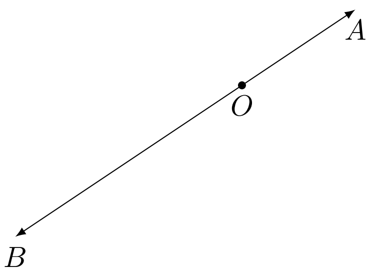
- M' est l'image de M par h ;
- $M' = h(M)$;
- $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemples 5.3.

- Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.



- Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2, en effet $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.



Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

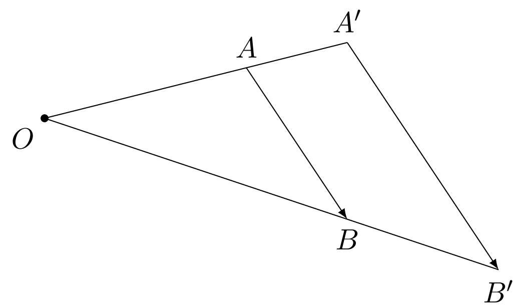
Conséquences 5.4. — Les points O, M et M' sont alignés (les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires) et $OM' = |k|\, OM$.
— Le point O est sa propre image, on dit qu'il est invariant.
— Si A, B et C sont trois points alignés, A étant distinct de B et C, alors il existe une unique homothétie de centre A qui transforme B en C.
— Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1.
— Une homothétie de rapport 1 laisse les points invariants.

5.2 Propriétés

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

PROPRIÉTÉ 5.5. Soient A et B deux points quelconques. Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

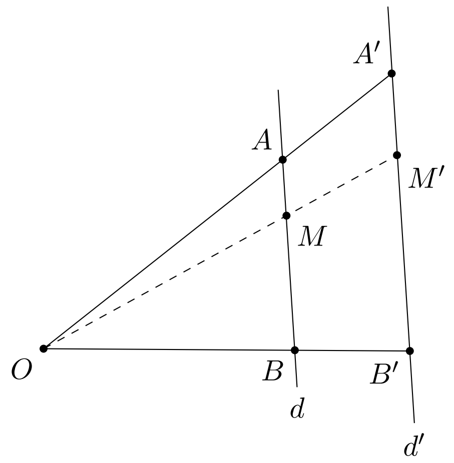
Démonstration. ♢ Comme $A' = h(A)$, on a $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et comme $B' = h(B)$, on a : $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$.
Alors :
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{AB}.$$



□

PROPRIÉTÉ 5.6 (IMAGE D'UNE DROITE). Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d. Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors $d' = d$.

Démonstration. $\Diamond$



Soient A et B deux points de d et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport k. Comme $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, la droite d' passant par A' et B' est parallèle à d.

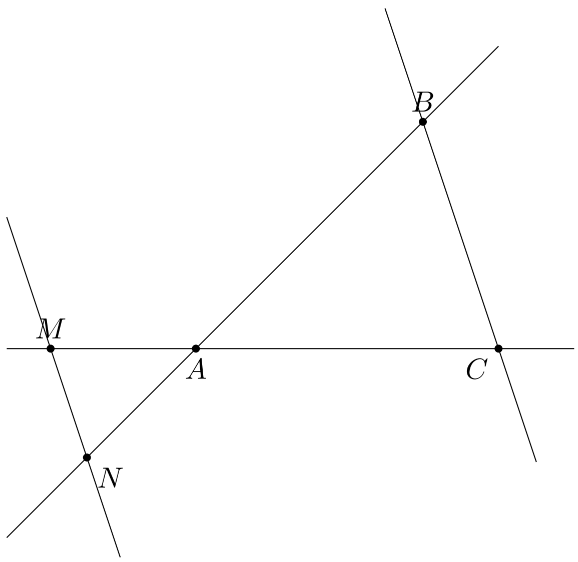
Soit M un point de d. Montrons que $M' = h(M)$ est sur d'. Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. D'autre part, $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$. Donc :

$$A'M' = kx\overrightarrow{AB} = xk\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{A'B'}.$$

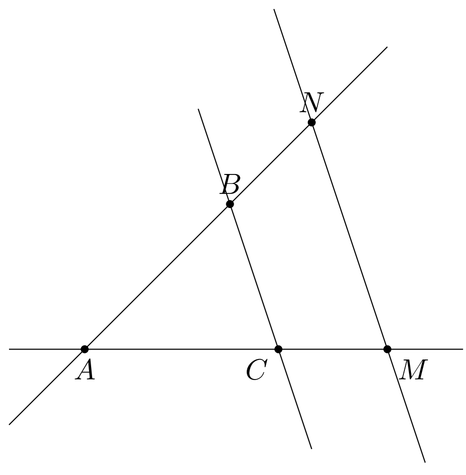
Cela montre que A', B' et M' sont alignés donc M' est sur d'. En prenant x dans $[0\,,1]$, cela montre aussi que le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$. $\square$

PROPRIÉTÉ 5.7 (TRIANGLES SEMBLABLES). Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si (MN) est parallèle à (BC), alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

1.



2.



Démonstration. $\Diamond$ Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M. Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC). Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC).

L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie). L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B, c'est donc la droite (MN).

L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN), c'est le point N. $\square$

PROPRIÉTÉ 5.8 (IMAGE D'UN CERCLE). Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en son cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k|\, R$.

5.3 Effets de l'homothétie

PROPRIÉTÉ 5.9 (DISTANCES, AIRES ET VOLUMES). Une homothéti de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

PROPRIÉTÉ 5.10 (CONSERVATION DE L'ALIGNEMENT). Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

PROPRIÉTÉ 5.11 (CONSERVATION DU PARALLÉLISME). Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d_1' et d_2' par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

PROPRIÉTÉ 5.12 (CONSERVATION DU BARYCENTRE). Si G est la barycentre de (A, α) et (B, β), et si G', A' et B' sont les images respectives de G, A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

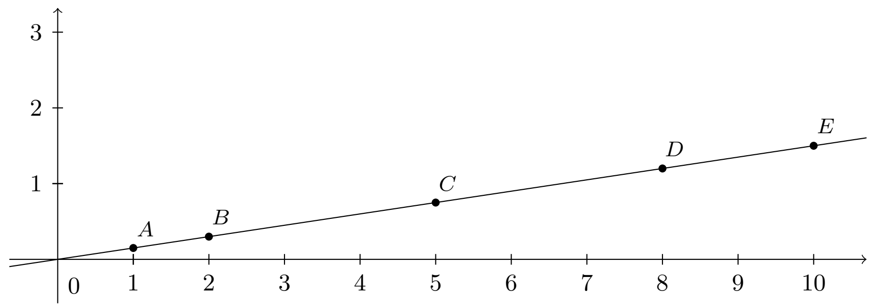
PROPRIÉTÉ 5.13 (CONSERVATION DES ANGLES ORIENTÉS). Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

6 Proportionnalité et fonction linéaire

Exemple 6.1.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$

Le graphique suivant représente le prix payé en fonction du nombre de SMS envoyé :



PROPRIÉTÉ 6.2. Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les points de la représentation graphique des valeurs d'une grandeur en fonction des valeurs de l'autre grandeur sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

Exemple 6.3. Reprenons l'exemples des SMS.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$

$\times 0.15$

Le coefficient de proportionnalité vaut $0,15$ donc si on envoie x SMS, le prix à payer $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS envoyés sera de $f(x) = 0,15 \times x$.

Définition 6.4. On se donne un réel a. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre ax est appelé *fonction linéaire* de coefficient directeur a.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f\colon x \mapsto ax$.

Le nombre $f(x) = ax$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

PROPRIÉTÉ 6.5. La représentation graphique d'une fonction linéaire f de coefficient directeur a est une droite passant par l'origine du repère et par le point $(1, a)$.

Une équation de cette droite est $y = f(x)$.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Démonstration. $\Diamond$ On considère le cas où $a > 0$.

$f(0) = 0$ et $f(1) = a$ donc la courbe passe bien par ces deux points. Soit x un réel non nul, considérons alors les points $O(0;0)$, $A(1;a)$, $A'(1;0)$, $B(x,y)$, $B'(x;0)$ sont tels que B appartienne à la droite passant par O et par A.

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles donc on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OBB'. On a : $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$. Les triangles OAA' et OBB' sont rectangles donc on peut appliquer Pythagore pour déterminer les longueurs OA et OB :

$$OB^2 = OB'^2 + BB'^2 = x^2 + y^2$$
$$OA^2 = OA'^2 + AA'^2 = 1 + a^2.$$

D'où :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{x} = \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{1+a^2}{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1+a^2}{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2(1+a^2) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2a^2 \Leftrightarrow y = ax$$

car si $y = -ax$, les points O, A et B ne seraient pas alignés. $\square$

PROPRIÉTÉ 6.6. Si deux grandeurs sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité a, alors l'une est fonction linéaire de l'autre et le coefficient de proportionnalité a de la situation de proportionnalité est égal au coefficient directeur de la fonction linéaire associée.

Réciproquement à toute fonction linéaire correspond une situation de proportionnalité.

7 Le nombre π

Définition 7.1. On définit le nombre π comme étant le rapport du périmètre de tout cercle divisé par son diamètre.