

Périmètres, aires, volumes.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Transversal

Prérequis

Intégrales, géométrie dans l'espace, notion de géométrie, figures usuelles

Références

- M. CUAZ, *Géométrie dans l'espace, solides de l'espace*. URL : <http://www.hexomaths.fr/fichiers/GeometrieespaceCOURS.pdf>.
- Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Solide géométrique*. Wikipédia.
- T. EVEILLEAU, *Les solides de Platon*. http://therese.eveilleau.pageperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/platon.htm.
- S. DELAUNAY, *M302 : Cours de Géométrie I*. 2009-2010.
- C. BOULONNE, *Notes de cours, M103 : Fondements de l'analyse 2*. 2006-2007.
- Y. MONKA, *Calculs de périmètres*. Académie de Strasbourg - www.maths-et-tiques.fr.
- G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths Ire S*. Bordas. Programme 2001.
- **Unknown**, *Dissections de polygones, la construction de Henry Ernest Dudeney (1857 - 1930)*. URL : <http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Panoplie/Dissect/dudeney.htm>.
- Mathématiques Internet Aix Marseille, *Calculs d'aires par découpage*. URL : http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/college/aire_college_classique.html.
- Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Médiane (géométrie)*. Wikipédia.
- APMEP, *Démontrer par les aires*. Journée régionale de Grenoble. 17 mars 2004.
- Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Théorème de Pick*. Wikipédia.

Table des matières

1	Périmètres	3
1.1	Unités de longueur	3
1.2	Calculer le périmètre d'une figure	3
1.3	Longueur (circonférence) d'un cercle	4

1.3.1	Une activité de découverte	4
1.3.2	Note historique	4
1.3.3	Formules et exemple	4
2	Aires	4
2.1	Comparer les aires	5
2.1.1	Egalité d'aires	5
2.1.2	Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle	5
2.1.3	Inégalité	7
2.1.4	Les multiples	7
2.1.5	Les partages	8
2.2	Mesurer une aire	8
2.2.1	Principe	8
2.2.2	Méthode	8
2.3	Calculer une aire	9
2.3.1	Aire d'un rectangle	9
2.3.2	Aire d'un triangle rectangle	9
2.3.3	Aire des polygones	9
2.3.4	Unités	10
2.3.5	Aire d'un cercle (ou de disque)	11
3	Volumes, aires latérales	11
3.1	Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)	12
3.2	Prises et cylindres	12
3.3	Pyramide	13
3.4	Solides de révolution	14
4	Compléments	15
4.1	Intégrale et aire	15
4.2	Partage de la médiane	20
4.3	Théorème du chevron	20
4.4	Formule de Pick	21

1 Périmètres

Définition 1.1. Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour. Pour un polygone, c'est la somme des longueurs de ses côtés.

1.1 Unités de longueur

Définition 1.2. La longueur est la mesure d'une distance. Son unité est le mètre, notée m .

kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 km = 1000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m	1 m	1 dm = 0,1 m	1 cm = 0,01 m	1 mm = 0,001 m

Méthode 1.3 (Conversion d'unités). Pour passer d'une sous-unité à la sous-unité supérieure, on divise par 10.

Pour passer d'une sous-unité à la sous-unité inférieure, on multiplie par 10.

Exemple 1.4.

$$5,6 \text{ m} = 560 \text{ cm}$$

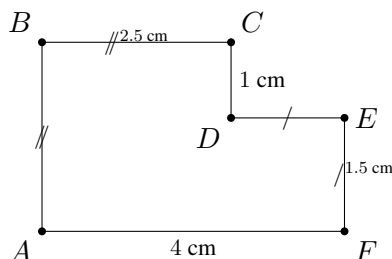
$$25,8 \text{ km} = 25800 \text{ m}$$

$$328 \text{ dm} = 3,28 \text{ dam}$$

PROPRIÉTÉ 1.5. Comme le périmètre est le calcul d'une longueur, l'unité utilisée est le mètre.

1.2 Calculer le périmètre d'une figure

Exemple 1.6. Soit un pentagone $ABCDEF$ tel que $AB = BC = 2,5 \text{ cm}$, $CD = 1 \text{ cm}$, $DE = EF = 1,5 \text{ cm}$ et $AF = 4 \text{ cm}$.



On calcule son périmètre :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= AB + BC + CD + DE + EF + AF \\ &= 2,5 + 2,5 + 1 + 1,5 + 1,5 + 4 \\ &= 13\text{cm}.\end{aligned}$$

On donne le périmètre de quelques figures usuelles.

- PROPRIÉTÉ 1.7.**
1. Le périmètre d'un carré de côté c est $\mathcal{P} = 4 \times c$.
 2. Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est $\mathcal{P} = 2 \times (L + \ell)$.
 3. Le périmètre d'un losange de côté c est $\mathcal{P} = 4 \times c$.
 4. Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté c est $\mathcal{P} = 3 \times c$.
 5. Le périmètre d'un triangle de côté a , b et c est $\mathcal{P} = a + b + c$.

1.3 Longueur (circonférence) d'un cercle

1.3.1 Une activité de découverte

- Prendre un rouleau de ruban adhésif et mesurer son diamètre D . On trouve (par exemple) $D = 6,1$ cm.
- Faire une marque au niveau de l'extrémité du ruban.
- Dérouler le ruban et couper au niveau de la marque.
- Coller le ruban ainsi découpé sur une feuille de papier et mesurer sa longueur. On trouve (dans cet exemple) $L = 19,2$ cm.
- Diviser L par D : $\frac{L}{D} = 3,1475$.

Recommencer plusieurs fois l'expérience avec des rouleaux de diamètres différents. Le rapport $\frac{L}{D}$ semble être égal quelque soit le diamètre du rouleau. Ce rapport s'appelle Pi.

1.3.2 Note historique

Le nombre Pi se note « π ». Son écriture est infinie. Les premières décimales sont :

$$\pi \approx 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944\dots$$

Dans la pratique, on prend : $\pi \approx 3,14$.

Archimède (-285 ; -212), savant de Syracuse, trouva $\pi \approx 3,14185$ pour valeur approchée de π . Ce qui fut remarquable pour une époque où on ne connaissait pas encore les méthodes de calculs posés et où les figures se dessinaient souvent sur le sable.

1.3.3 Formules et exemple

Exemple 1.8. On veut calculer la longueur d'un cercle de diamètre 5 cm. Le rapport $\frac{L}{D}$ est égal au nombre π . D'après la définition du quotient $\frac{L}{D} \times D = L$. Ainsi la longueur du cercle est égale au produit de π par le diamètre :

$$\pi \times 5 \approx 3,14 \times 5 \approx 15,7 \text{ cm.}$$

La longueur d'un cercle de diamètre 5 cm est environ de 15,7 cm.

PROPRIÉTÉ 1.9. La circonférence L d'un cercle est donnée par la formule suivante :

$$L = \pi \times D$$

où $\pi \approx 3,14$ et D est le diamètre du cercle.

On peut aussi écrire :

$$L = 2 \times \pi \times R$$

où $\pi \approx 3,14$ et $R = D/2$ le rayon du cercle.

Exemple 1.10. On veut calculer la longueur L d'un quart de cercle de diamètre 4 cm. On peut calculer la longueur L' du cercle de diamètre 4 cm par la formule précédente :

$$L = 4 \times \pi \approx 4 \times 3,14 \approx 12,56 \text{ cm.}$$

Or : $4L' = L$ d'où $L' = \frac{L}{4} = \frac{4 \times \pi}{4} = \pi \approx 3,14$ cm.

2 Aires

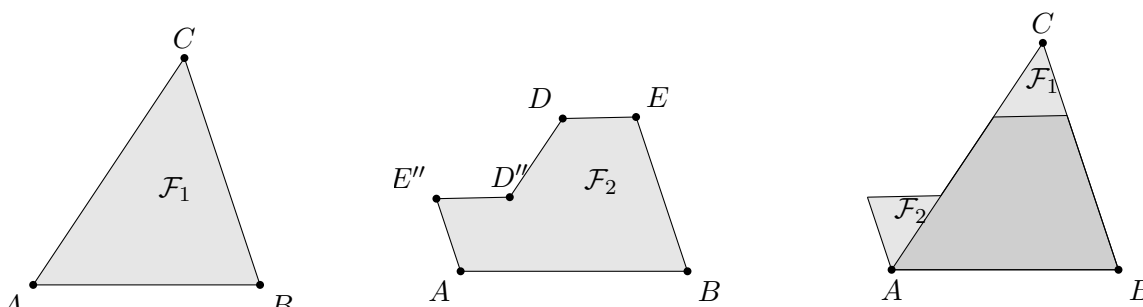
Définition 2.1. L'aire est une grandeur relative à certaines figures du plan ou des surfaces en géométrie dans l'espace. C'est l'« intérieur » de la figure.

2.1 Comparer les aires

2.1.1 Egalité d'aires

Définition 2.2. On dit que deux figures ont la même aire si en découpant l'une d'entre elle, on peut recomposer l'autre.

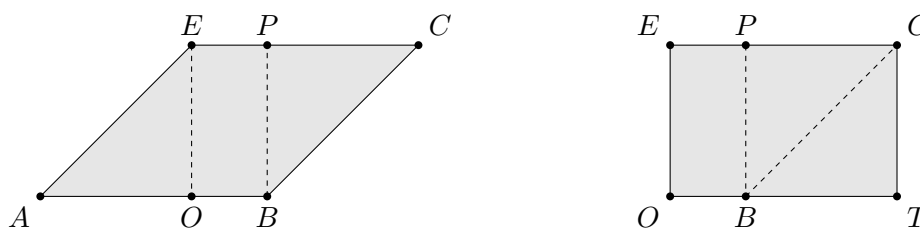
Exemple 2.3. La figure \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ont la même aire car si on découpe le triangle $AE''D''$ de la figure \mathcal{F}_2 et qu'on le place sur l'arrête $[DE]$ de sorte que $[DE]$ et $[D''E'']$ coïncide, on retrouve la figure \mathcal{F}_1 .



2.1.2 Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle

PROPOSITION 2.4. On peut toujours découper un polygone en un rectangle de même aire.

Exemple 2.5. Dans le parallélogramme $ABCE$, on a découpé le triangle AEO qu'on a collé sur le segment CB . On obtient ainsi le rectangle $OECT$.



PROPOSITION 2.6 (DÉCOUPAGE DE DUDENEY (1902)). On peut découper un triangle équilatéral en quatre morceaux pour qu'il puisse former un rectangle.

Démonstration. \diamond On va expliciter la construction de Dudeney. On se donne un triangle ABC équilatéral de côté 2. On note E et D les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$. On construit I sur $[BC]$ tel que $EI^4 = 3$. Pour cela,

- On construit M le symétrique de A par rapport à (BC) . Ainsi $AM = 2\sqrt{3}$.
- On construit le cercle (\mathcal{C}_2) de centre M passant par B , donc de rayon 2. On note P l'intersection de la droite (AM) et du cercle (\mathcal{C}_2) , P se trouvant à l'extérieur du triangle ABC .
- On note Q le milieu de $[AP]$ et on construit (\mathcal{C}_1) le cercle de centre Q passant par A ((\mathcal{C}_1) a pour rayon $1 + \sqrt{3}$).
- On note O l'intersection du cercle (\mathcal{C}_1) et de la parallèle à (BC) passant par M . On a alors $OM = 2\sqrt[4]{3}$.
- Soit N le milieu de $[OM]$ alors MN est la longueur EI cherchée.

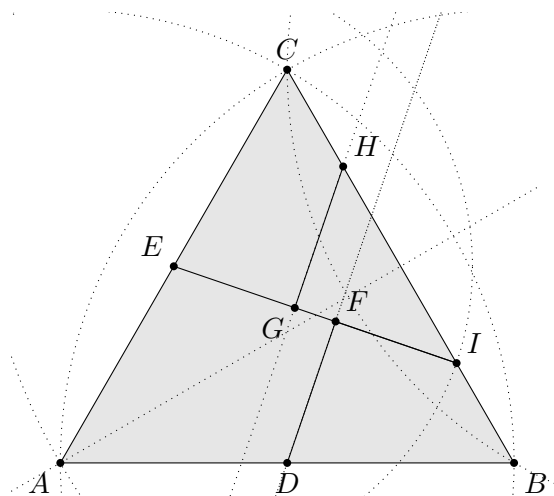
On note F le projeté orthogonal de D sur $[EI]$ et G le point de $[EI]$ tel que $EG = IF$. H est l'antécédent sur $[BC]$ de G par projection orthogonale sur (EI) .

On donne une suite d'instructions à faire sur Geogebra pour réaliser la construction précédente :

```

A = (0,0)
B = (2,0)
Cercle[A,2]
Cercle[B,2]
C = Intersection[c,d,1]
Polygone[A,B,C]
D = MilieuCentre[A,B]
E = MilieuCentre[A,C]
# Construction du point I
M = Symétrie[A,a]
C_2 = Cercle[M,2]
Droite[A,M]
P = Intersection[e,C_2,2]
Q = MilieuCentre[A,P]
C_3 = Cercle[Q,A]
Droite[M,a]
O = Intersection[C_3,f,1]
N = MilieuCentre[O,M]
Segment[M,N]
Cercle(E,g)
I = Intersection(a,h)
# Fin de la construction du point I
Segment[E,I]
Perpendiculaire[D,h]
F = Intersection[i,h]
Segment[I,F]
Cercle(E,j)
G = Intersection[h,p]
Perpendiculaire[G,h]
H = Intersection[a,l]
Segment[G,H]
Segment[D,F]

```



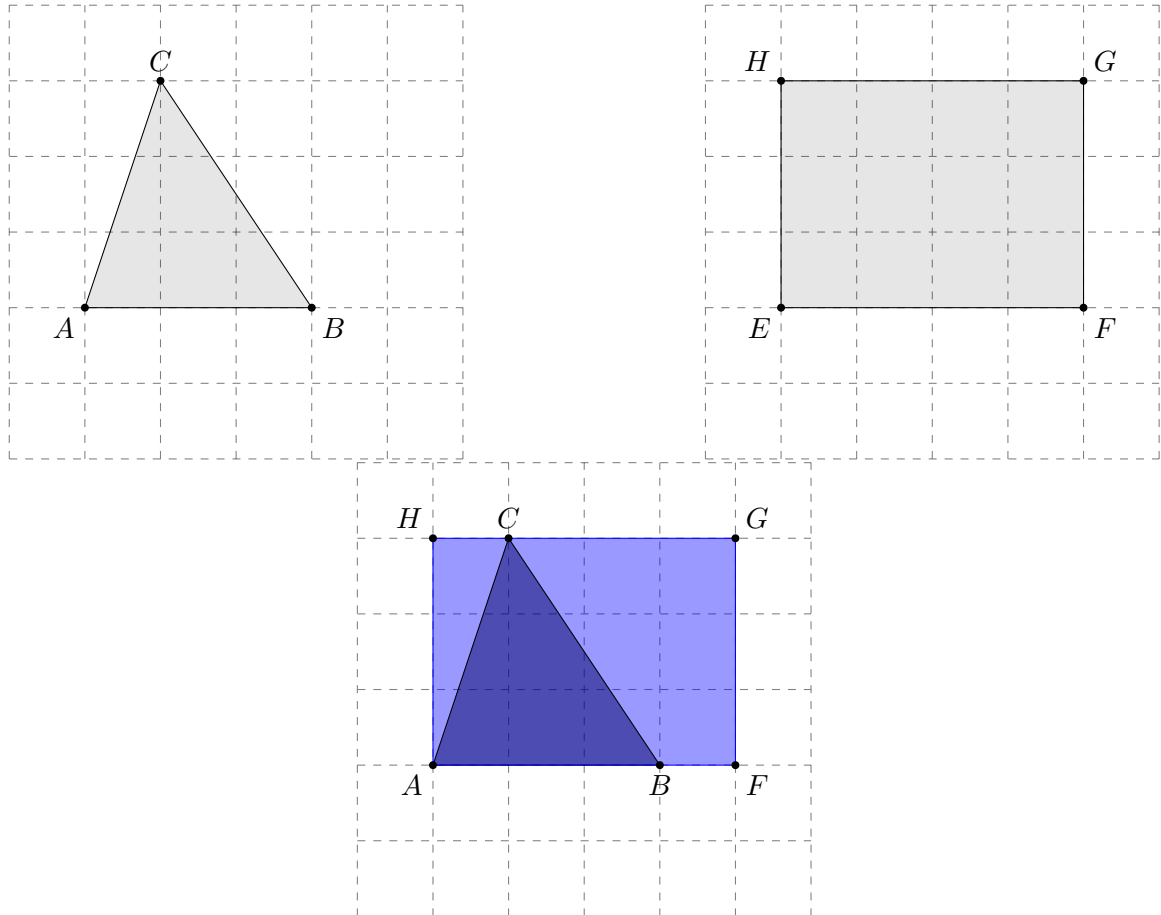
□

2.1.3 Inégalité

Définition 2.7. On dit que deux figures n'ont pas la même aire si en essayant de découper une des figures pour la reconstituer en l'autre figure, les deux surfaces ne sont pas superposables^a.

a. c'est-à-dire qu'une des deux surfaces « dépassent » l'autre

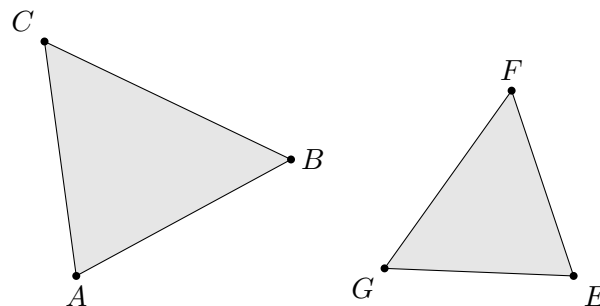
Exemple 2.8. Dans la figure ci-dessous, les deux figures n'ont pas la même aire car si on les superpose, la surface d'une des deux figures dépassent l'autre.



2.1.4 Les multiples

Définition 2.9. Soit A_1 (resp. A_2) l'aire de deux polygones P_1 (resp. P_2). On dit que les deux aires sont multiples l'un de l'autre s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A_1 = kA_2$.

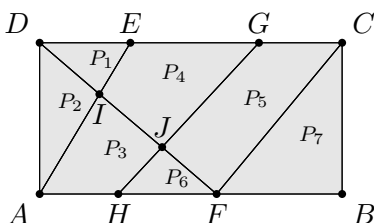
Exemple 2.10. La figure ci-dessous nous montre deux figures dont les aires sont multiples.



2.1.5 Les partages

Définition 2.11. Soit un polygone P et A son aire. On dit qu'on partage le polygone P en des polygones (P_1, \dots, P_n) avec aires (A_1, \dots, A_n) si pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_i \subset P$ (les polygones P_i sont dans le polygone P) et il existe $0 < k_i < 1$, tels que $A_i = k_i A$ et $\sum_{i=1}^n k_i = 1$.

Exemple 2.12. Soit $ABCD$ le rectangle de la figure ci-dessous. On dit que (P_1, \dots, P_7) partage le rectangle.



2.2 Mesurer une aire

2.2.1 Principe

Définition 2.13 (Aire d'une surface). L'aire d'une surface est la mesure de sa surface, dans une unité d'aire donnée.

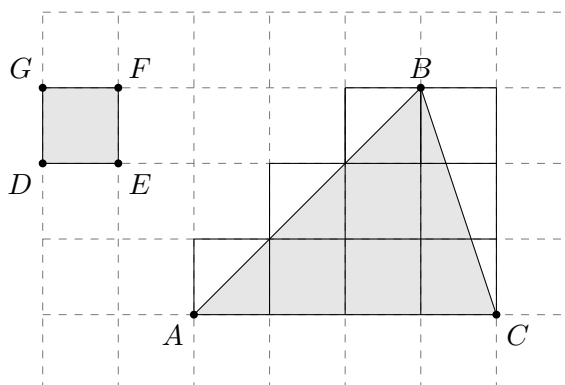
Définition 2.14. Mesurer une aire d'un polygone, c'est compter le nombre de carré unité (on précisera l'unité plus tard) qui sont inscrit dans ce polygone.

2.2.2 Méthode

Définition 2.15. On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, il faut le partager avec autant de carré unité que l'on peut (quitte à ce que la surface de ce carré dépasse la figure).

Définition 2.16. On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, on peut le découper pour en faire un rectangle et ensuite compter le nombre de carré unité inscrit dans le rectangle.

Exemple 2.17. L'aire du triangle ABC de la figure ci-dessous est 6 car en le découpant, on peut former un rectangle qui contient 6 carré unité $DEFG$.



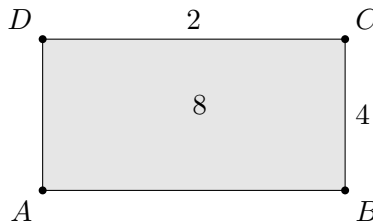
2.3 Calculer une aire

2.3.1 Aire d'un rectangle

Définition 2.18 (Aire d'un rectangle). Un rectangle de longueur L et de largeur l a pour aire $L \times l$.

Démonstration. \diamond Soit un rectangle de longueur L et de largeur l . Sur la longueur, on peut inscrire L carré unité et sur la largeur, l carré unité. Donc, le nombre de carrés unité qu'on peut inscrire dans le rectangle est Ll et ainsi, l'aire du rectangle est Ll . \square

Exemple 2.19. L'aire du rectangle de la figure ci-dessous est de 8.



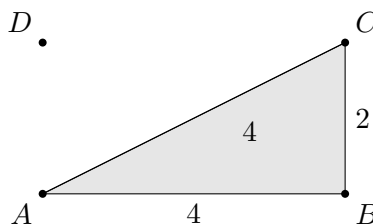
2.3.2 Aire d'un triangle rectangle

Définition 2.20. L'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur h est $\frac{b \times h}{2}$.

Démonstration. \diamond Un triangle rectangle de base b et de hauteur h ($b > h$) est un rectangle de longueur b et de largeur h qu'on a coupé en deux (l'hypoténuse du triangle rectangle correspond à une des diagonales du rectangle). Donc, comme l'aire du rectangle est $b \times h$, l'aire du triangle rectangle est $\frac{1}{2}(b \times h)$. \square

Exemple 2.21. L'aire d'un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 2 est :

$$A = \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4.$$

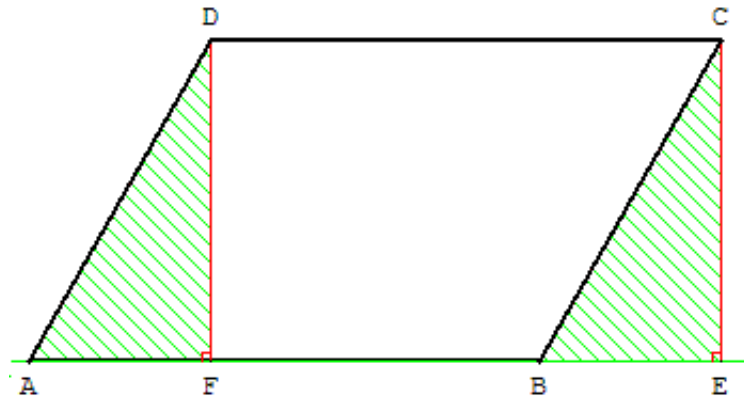


2.3.3 Aire des polygones

On montre dans l'exemple suivant comment transformer certains polygones en rectangle pour pouvoir calculer leur aire.

Exemples 2.22. 1. L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. Soit $ABCD$ un parallélogramme, E et F les projections orthogonales de C et D sur (AB) . Le rectangle $FECD$ a même aire que le parallélogramme, car les triangles ADF et BCE sont isométriques. D'où

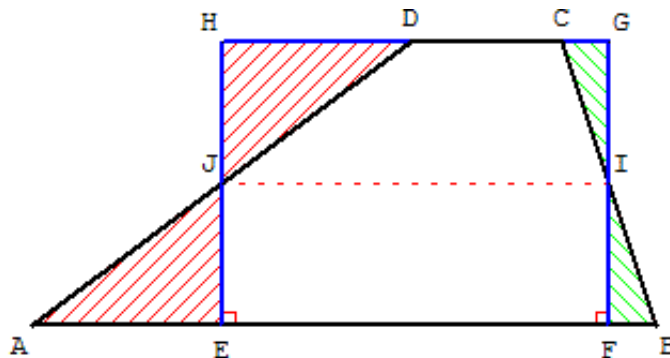
$$\text{Aire}(ABCD) = AB \times DF = a \times h \quad \text{où } a = AB = CD \text{ et } h = DF = CE.$$



2. La surface d'un trapèze a pour mesure le produit de la moyenne des bases par sa hauteur. Si $b = AB$, $b' = CD$ et $h = HE$ alors

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{b + b'}{2} \times h.$$

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base $[AB]$, et de petite base $[CD]$ parallèle à (AB) et I et J les milieux des côtés $[BC]$ et $[AD]$. D'après la propriété de Thalès, IJ est égal à la moyenne des bases. Soient E et F les projections orthogonales de J et I sur (AB) ainsi que G et H les projections orthogonales de I et J sur (CD) . Le rectangle $EFGH$ a même aire que le trapèze $ABCD$ car les triangles rectangles IGC et IFB sont isométriques, de même que les triangles JHD et JEA .



2.3.4 Unités

Définition 2.23. L'unité légale de mesure d'aire est le mètre carré (m^2).

Remarques 2.24. 1. Si les longueurs du polygone sont en cm alors l'aire du polygone s'exprime en cm^2 .

2. On peut exprimer aussi l'aire en ares et hectares (ce sont les mesures agraires). On a ainsi :

$$1 \text{ are} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2.$$

$$1 \text{ hectare} = 1 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ m}^2.$$

PROPOSITION 2.25 (CONVERSION D'UNITÉS D'AIRES). Passer d'une unité supérieure d'aire, c'est multiplier par 100 l'unité d'aire utilisée.

Pour changer d'unités d'aire, on a alors besoin du tableau de conversions des unités d'aires :

Exemple 2.26.

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
	5	20				
			004	03		

Ainsi,

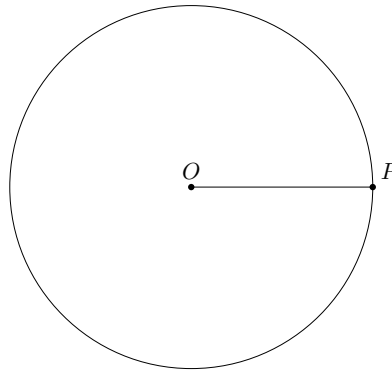
$$520 \text{ ares} = 520 \text{ dam}^2 = 5,2 \text{ hm}^2 = 5,2 \text{ hectares.}$$

$$0,0403 \text{ m}^2 = 4,03 \text{ dm}^2 = 403 \text{ cm}^2.$$

2.3.5 Aire d'un cercle (ou de disque)

Définition 2.27. Le nombre π est défini comme le rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre.

Définition 2.28. L'aire du disque de rayon R est $\pi \times R^2$.



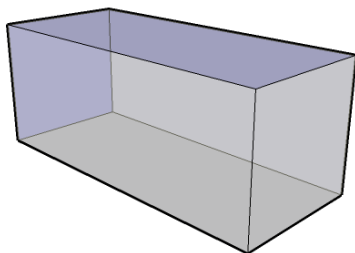
L'aire du cercle de rayon 3 cm est $9\pi \text{ cm}^2$

3 Volumes, aires latérales

Définition 3.1 (Volume). On appelle *volume* la portion de l'espace occupée par un solide. Elle est mesurée (généralement) en m³ (ou ses sous-unités).

Définition 3.2 (Aire latérale). On appelle *aire latérale* (ou surface latérale) du solide, la surface délimitant ce solide privée de sa (ou ses) base(s). Elle est mesurée (généralement) en m² (ou ses sous-unités).

3.1 Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)



PROPRIÉTÉ 3.3. Soit un pavé droit de longueur L , de largeur ℓ et de hauteur h . Alors son volume \mathcal{V} est donnée par la formule :

$$\mathcal{V} = L \times \ell \times h.$$

L'aire latérale \mathcal{A} de ce pavé droit est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = 2h \times (L + \ell)$$

a . La base de ce pavé droit est un rectangle de longueur $L \times \ell$

Cas particulier d'un cube :

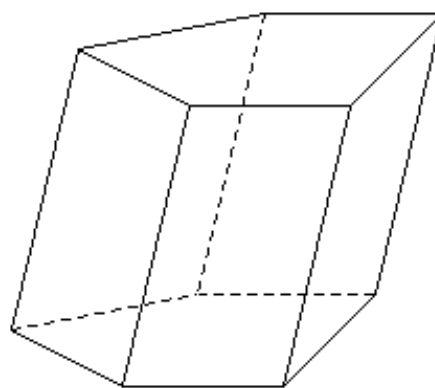
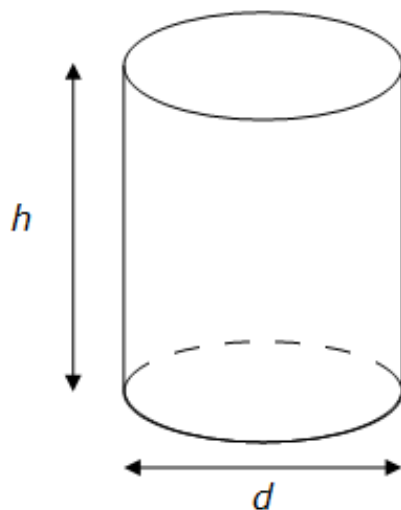
PROPRIÉTÉ 3.4. Soit un cube dont les faces sont des carrés de côté a . Le volume \mathcal{V} du cube est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = a^3.$$

L'aire latérale \mathcal{A} de ce cube est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{A} = 4a^2.$$

3.2 Prises et cylindres



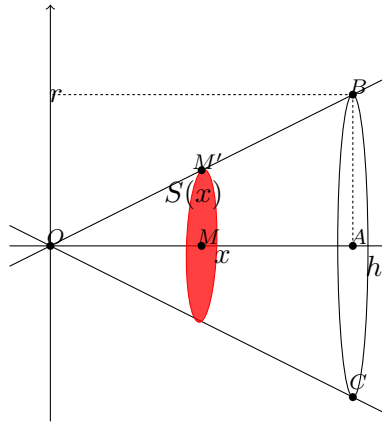
PROPRIÉTÉ 3.5. — Le volume du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

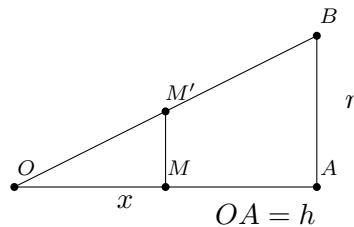
— L'aire du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathcal{A} = \text{périmètre de la base} \times \text{hauteur}.$$

Démonstration. \diamond



On coupe le cône par un plan passant par la droite (OA) et on obtient le triangle OAB suivant :



D'après le théorème de Thalès :

$$MM' = \frac{rx}{h}$$

donc

$$S(x) = \pi \left(\frac{rx}{h} \right)^2.$$

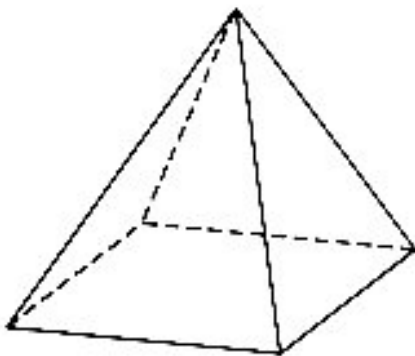
$$\mathcal{V} = \int_0^h \frac{\pi}{r^2} h^2 x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Soit :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

On peut faire de même pour démontrer le volume de la pyramide. \square

3.3 Pyramide



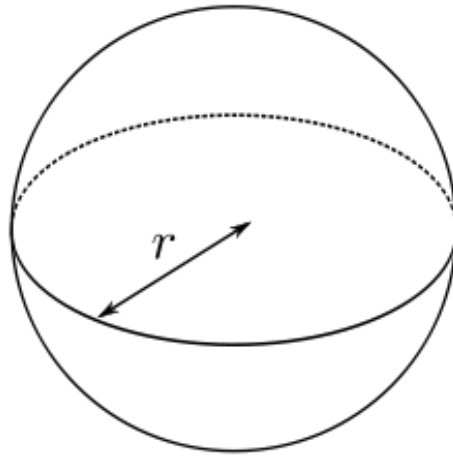
PROPRIÉTÉ 3.6. Si on note c le côté de la base et h la hauteur de la pyramide alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3}$$

PROPRIÉTÉ 3.7. Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3}.$$

3.4 Solides de révolution



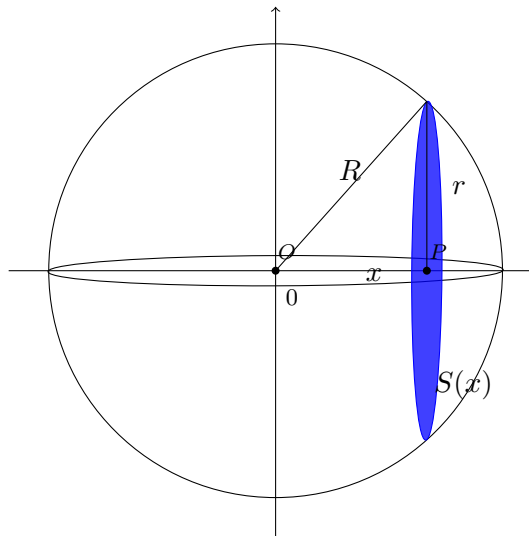
PROPRIÉTÉ 3.8. Le volume d'une sphère de rayon R est :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

L'aire d'une sphère de rayon R est :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2.$$

◇ Une démonstration proposée en TS.



Avec le théorème de Pythagore, on peut affirmer que le rayon du disque d'intersection est : $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où :

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^R S(x) dx = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(\pi R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

◇ Une démonstration proposée en BTS. On rappelle les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

Or : $dx dy dz = R^2 \times |\sin \varphi| dR d\varphi d\theta$ (R^2 est le déterminant de la matrice jacobienne). Si on note \mathcal{S} la sphère :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{S}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} d\theta = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

et pour l'aire, R ne varie pas :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2 d\theta = 4\pi R^2.$$

□

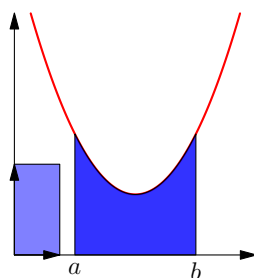
4 Compléments

4.1 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , non nécessairement orthonormal.

Définition 4.1 (Aire sous la courbe). Soit une fonction f , continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. L'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire du domaine plan \mathcal{D} limité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x) dx$ cette aire et on lit l'intégrale (ou somme) de a à b de f .

- Remarques 4.2.*
1. Le domaine \mathcal{D} peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
 2. L'aire du domaine \mathcal{D} est exprimée en unité d'aire; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.



- Exemples 4.3.**
1. $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe \mathcal{C} représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
 2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe \mathcal{C} représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.

PROPRIÉTÉ 4.4. Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. L'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à la limite commune

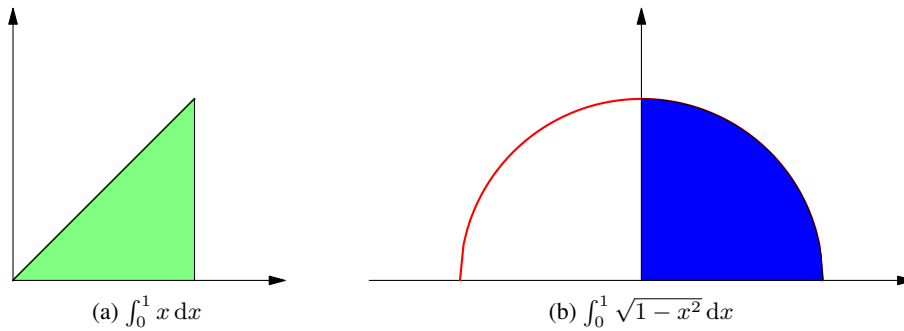


FIGURE 1 – Figure pour l'exemple

des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n , on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe \mathcal{C} diminue.

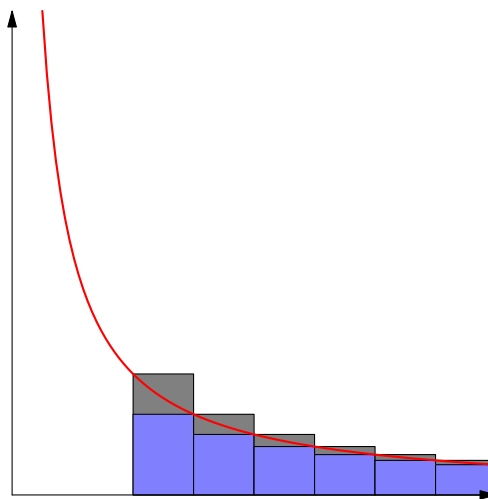


FIGURE 2 – Représentation des suites u_n et v_n

- Remarques 4.5.**
1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.
 2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

PROPRIÉTÉ 4.6 (RELATION DE CHASLES). Soit une fonction f , continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

On découpe l'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[a, b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$.

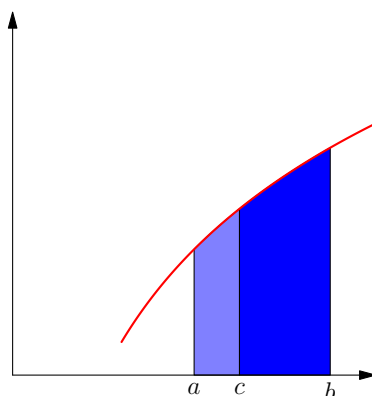


FIGURE 3 – Relation de Chasles

Exemple 4.7. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 4. Alors :

$$\int_{-1}^2 f(x) \, dx = \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

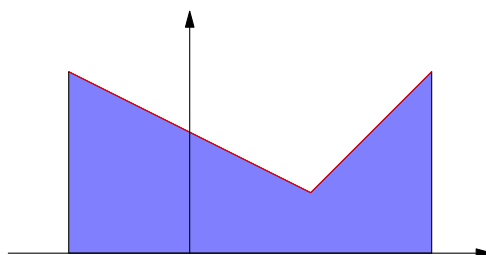


FIGURE 4 – Représentation graphique de f pour l'exemple

Définition 4.8 (Valeur moyenne). Soit une fonction f , continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a, b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f . L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

Définition 4.9. Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x) \, dx$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

PROPRIÉTÉ 4.10. Soit une fonction f , continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. L'aire du domaine \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équa-

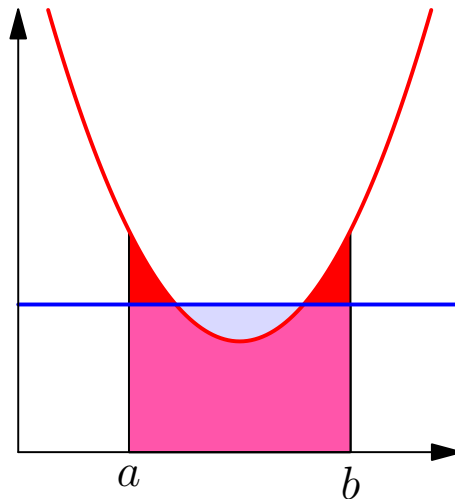
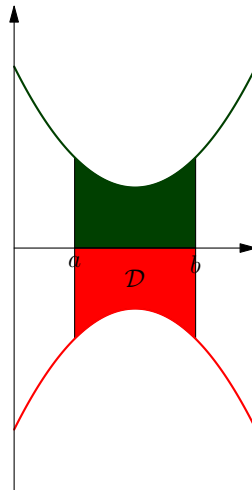


FIGURE 5 – Valeur moyenne

tions $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

◇ *Démonstration de la propriété 4.10.* C_{-f} , la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de C_f , courbe représentative de f . L'aire du domaine \mathcal{D} est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe C_{-f} . Cette aire est donc $\int_a^b -f(x) \, dx$. D'après la définition 4.9, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x) \, dx$.



□

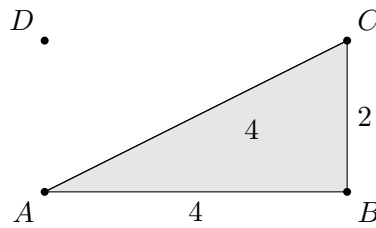
PROPRIÉTÉ 4.11. Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à :

$$-\frac{1}{b-a} \int_a^b -f(x) \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Exemple 4.12. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 1]$ est $-\frac{1}{3}$.

Exemple 4.13. L'aire d'un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 2 est :

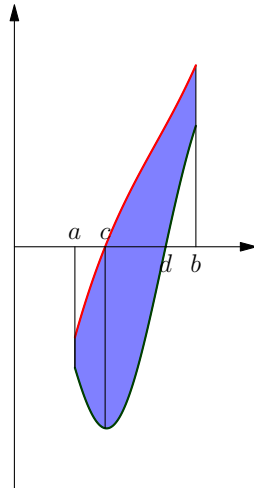
$$A = \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4.$$



PROPRIÉTÉ 4.14. Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine \mathcal{D} limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

◇ *Démonstration de la propriété 4.14.* On découpe l'intervalle $[a, b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signe ou de signe contraire.



Ainsi, dans la figure ci-dessus, l'aire entre les deux courbes est :

— sur l'intervalle $[a, c]$:

$$-\int_a^c f(x) dx + \int_a^c g(x) dx ;$$

— sur l'intervalle $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x) dx + \int_c^d g(x) dx ;$$

— sur l'intervalle $[d, b]$:

$$\int_d^b f(x) dx - \int_d^b g(x) dx.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien

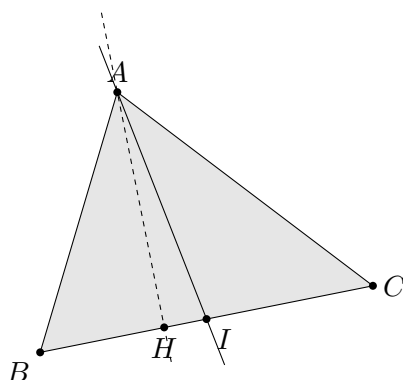
$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

pour la valeur de l'aire du domaine \mathcal{D} .

□

4.2 Partage de la médiane

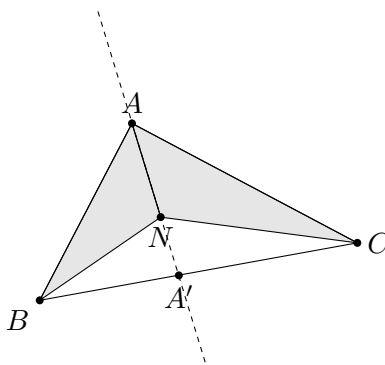
THÉORÈME 4.15. Soit ABC un triangle et (AI) la médiane issue de A . L'aire du triangle ABI est égale à l'aire du triangle ACI .



Démonstration. \diamond On considère les deux triangles ABI et ACI . On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) . Comme I est le milieu du segment $[BC]$, on a $BI = CI$. L'aire du triangle ABI est égale à $\frac{BI \times AH}{2}$. L'aire du triangle ACI est égale à $\frac{CI \times AH}{2}$. Comme $BI = CI$, ces deux aires sont égales. \square

4.3 Théorème du chevron

THÉORÈME 4.16. Soit N un point intérieur au triangle ABC et A' le point d'intersection de la droite (AN) et du segment $[BC]$. Alors le rapport des aires des triangles ANB et de ANC est égal au rapport des distances BA' et CA' .



Pour démontrer le théorème 4.16, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.17. Si deux triangles ont un sommet commun A et des bases $[BC]$ et $[CC']$ portés par une même droite, alors le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs de leurs bases.

\diamond *Démonstration du lemme 4.17.* On doit étudier trois cas :

1. Si l'une des bases est un multiple entier de l'autre, on applique plusieurs fois le partage de la médiane.
2. Si les deux bases sont commensurables (c'est-à-dire sont multiples d'une même grandeur prise comme unité), on applique deux fois le premier cas.

1. Une autre façon élémentaire de le démontrer est de remarquer que ces deux triangles sont les moitiés de deux parallélogrammes de côté commun (AI) et translétés l'un de l'autre.

3. Si les deux bases sont incommensurables, on obtient le résultat par passage à la limite (tout irrationnel peut être considéré comme la limite d'une suite de rationnels). Il y a ici un « saut » incontournable (le même celui que l'on fait quand on généralise la formule de l'aire d'un rectangle : aire = base \times hauteur).

□

◇ *Démonstration du théorème du chevron.* On applique le lemme 4.17 aux triangles $AA'B$ et $AA'C$ et ensuite, aux triangles ANB et ANC . □

4.4 Formule de Pick

THÉORÈME 4.18. Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille. L'aire A de ce polygone est donnée par :

$$A = i + \frac{1}{2}b - 1,$$

où i est le nombre de points intérieurs du polygone et b le nombre de points du bord du polygone.

Exemple 4.19. Dans la figure ci-dessous, nous avons $i = 9$ et $b = 14$. Ainsi, l'aire est

$$A = 9 + \frac{14}{2} - 1 = 9 + 7 - 1 = 15.$$

