Relations métriques et angulaires dans le triangle.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Géométrie du triangle

Références

— G. COSTANTINI, *Trigonométrie, relations métriques dans un triangle*.
— Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Théorème de Pythagore*, Wikipédia.
— M. LEZEN, *Leçon n° 32 : Relations métriques dans un triangle. Trigonométrie. Applications.* URL : `http://capes-de-maths.com`.
— Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Inégalité triangulaire*, Wikipédia.
— Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Théorème de la médiane*, Wikipédia.
— Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Somme des angles dans un triangle*, Wikipédia.

Table des matières

1 Relations métriques dans le triangle **2**
1.1 Inégalité triangulaire 2
1.2 Théorème de Pythagore 3
1.3 Formules d'Al-Khashi 4
1.4 Formule des 3 sinus 4
1.5 Théorème de la médiane 4
1.5.1 Théorème de Thalès 6

2 Relations angulaires dans le triangle **7**
2.1 Somme des angles dans un triangle 7
2.2 Trigonométrie dans un triangle rectangle 8
2.3 Formules trigonométriques 8

3 Applications **12**

1 Relations métriques dans le triangle

1.1 Inégalité triangulaire

PROPRIÉTÉ 1.1. Dans un plan euclidien, soit un triangle ABC. Alors les longueurs AB, AC et CB vérifient les trois inégalités suivantes :

$$AB \leq AC + CB;$$
$$AC \leq AB + BC;$$
$$BC \leq BA + AC.$$

Réciproquement, étant données trois longueurs dont chacune est inférieure à la somme des deux autres, il existe un triangle ayant ces longueurs de côté.

Cas d'égalité :

$$AB = AC + CB \Leftrightarrow C \in [AB].$$

Démonstration. $\Diamond$ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. D'où :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| .$$

Et donc :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Cas d'égalité : supposons que $\|x + y\| = \|x\| + \|\|$ et $y \neq 0$. Par ce qui précède, on a donc :

$$\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| .$$

Donc, par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, $x = \lambda y$ avec $\lambda = \langle x, y \rangle / \|y\|^2 = \|x\| / \|y\| \geq 0$. Finalement, on a bien $\lambda y = \mu x$ avec $\mu = 1$. $\square$

Pour les cinquièmes,

PROPRIÉTÉ 1.2. Dans un triangle non aplati, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres côtés.

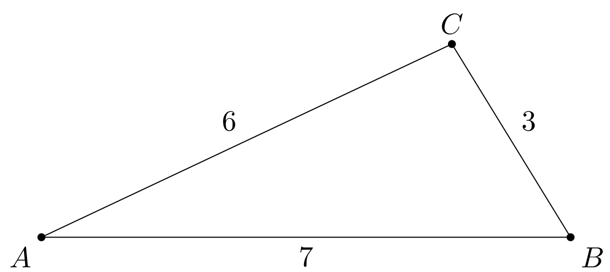
Conséquence 1.3. Pour tous points A, B et C du plan, si $AC < AB + BC$ alors on peut construire un triangle ABC.

Autre formulation :

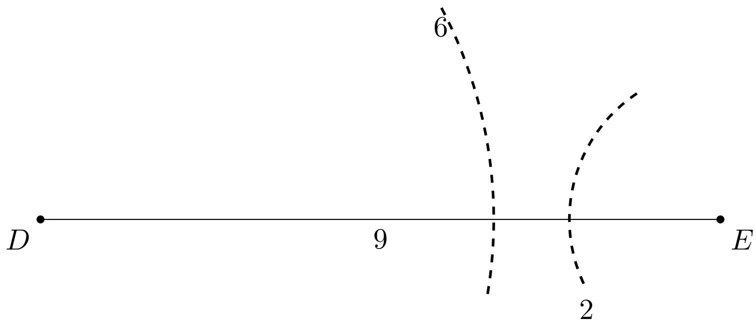
PROPOSITION 1.4. Pour savoir si un triangle est constructible avec trois longueurs données, il faut que la somme des deux plus petites longueurs soit supérieure à la plus grande.

Exemples 1.5.

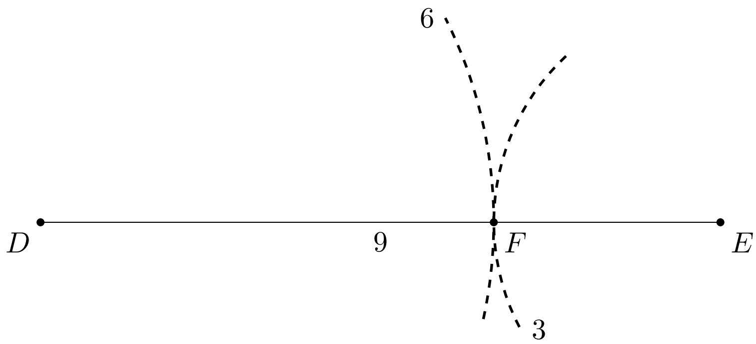
1. On veut savoir si le triangle ABC est constructible si $AB = 7$ cm, $B = 3$ cm et $AC = 6$ cm. Le plus grand côté est 7 et $7 < 3 + 6$ ou encore $AB < AC + BC$ donc oui le triangle est constructible.



2. On veut savoir si le triangle EDF est constructible si $ED = 9$ cm, $EF = 2$ cm et $DF = 6$ cm. Le plus grand côté est 9 or 9 n'est pas plus petit que $2+6$ donc le triangle EDF n'existe pas.



3. Cas particulier : Si $DF = 6$ cm et $EF = 3$ cm alors $DE = DF + EF$. On dit alors que le triangle est aplati.



PROPRIÉTÉ 1.6. Si le point B appartient au segment $[AC]$ alors $AC = AB + BC$.

Le point B appartient au segment $[AC]$ signifie aussi que les 3 points A, B et C sont alignés.

1.2 Théorème de Pythagore

THÉORÈME 1.7 (THÉORÈME DE PYTHAGORE). ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$\Diamond$ *Démonstration du théorème de Pythagore.* Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs portés par les côtés du triangle ABC vérifient la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Ainsi :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc la relation du théorème est équivalente à l'annulation du dernier produit scalaire, ce qui correspond précisément au cas où les vecteurs sont orthogonaux, autrement dit lorsque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ forment un angle droit. $\square$

Exemple 1.8 (Escargot).. On part d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse mesurent 1 unité. L'hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ unités. On place un triangle rectangle sur cette hypoténuse, son côté adjacent à l'angle droit mesurant 1 unité. Alors l'hypoténuse de ce nouveau triangle mesure $\sqrt{3}$ unités, et ainsi de suite…

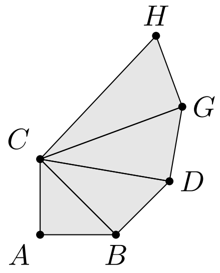


FIGURE 1 – Escargot

1.3 Formules d'Al-Khashi

THÉORÈME 1.9 (FORMULE D'AL-KASHI). Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

♢ *Démonstration du théorème 1.9.* Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= c^2 + b^2 + 2bc\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos \widehat{A}$. □

1.4 Formule des 3 sinus

THÉORÈME 1.10 (FORMULE DES 3 SINUS). Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de se triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Démonstration du théorème 1.10. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

1.5 Théorème de la médiane

THÉORÈME 1.11 (THÉORÈME D'APOLLONIUS). Soient ABC un triangle quelconque et (AI) la médiane issue de A. On a alors la relation suivante :

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

ou encore :

$$AB"2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

$\Diamond$ *Démonstration par le produit scalaire.* Cette propriété est un cas simple de la réduction de la fonction scalaire de Leibniz : il suffit de faire intervenir le point I dans les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par la relation de Chasles :

$$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2.$$

Si on développe l'expression de droite, on obtient :

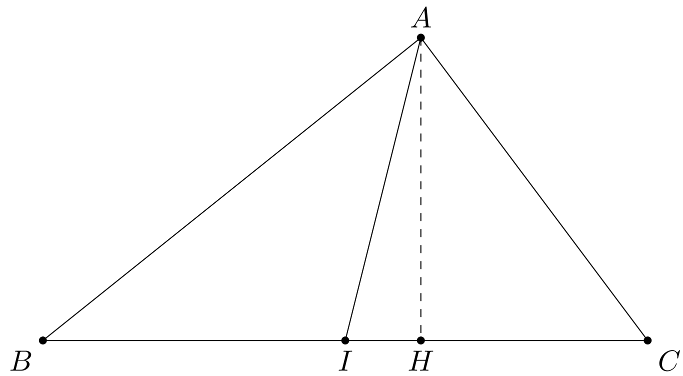
$$AB^2 + AC^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Le point I est milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont opposés, ce qui implique que les produits scalaires s'éliminent et $IC^2 = IB^2$ donc :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2.$$

$\square$

$\Diamond$ *Démonstration sans le produit scalaire.* Soit H le pied de la hauteur issue de A.



Les trois triangles AHB, AHC et AHI sont rectangle en H ; en leur appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2,\ AC^2 + AH^2 + HC^2 \quad \text{et} \quad AI^2 = AH^2 + HI^2.$$

On en déduit :

$$AB^2 + AC^2 = HB^2 + HC^2 + 2AH^2 = HB^2 + HC^2 + 2(AI^2 - HI^2).$$

On exprime HB et HC en fonciton de HI et BI. Quitte à intervertir B et C si nécessaire, on peut toujours supposer que B et H sont du même côté de I. Alors :

$$HB = |HI - BI| \quad \text{et} \quad HC = HI + IC = HI + BI.$$

On peut donc transformer, dans l'expression ci-dessus de $AB^2 + AC^2$, la sous-expression

$$\begin{aligned} HB^2 + HC^2 &= (HI - BI)^2 + (HI^2 + BI)^2 \\ &= HI"2 - 2HI.BI + BI^2 + HI^2 + 2HI.BI + BI^2 \\ &= 2HI^2 + 2BI^2. \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient :

$$AB^2 + AC^2 = 2HI^2 + 2BI^2 + 2(AI^2 - HI^2) = 2BI^2 + 2AI^2$$

$\square$

Exemple 1.12. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

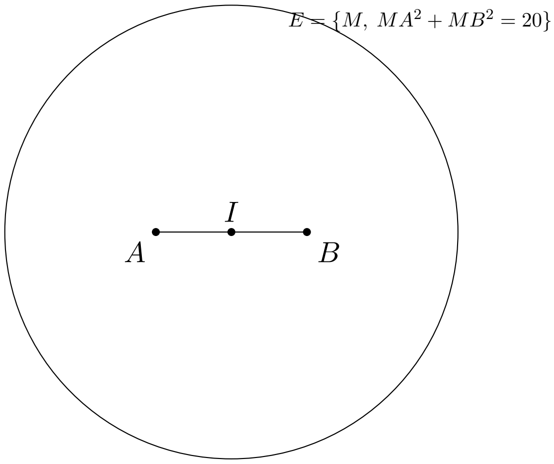


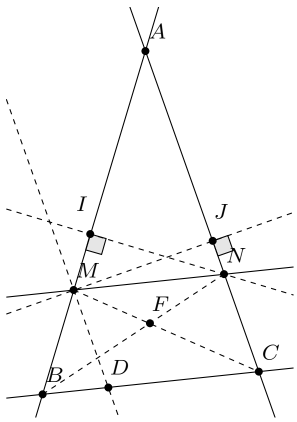
FIGURE 2 – Construction de l'ensemble E de l'exemple 1.12

1.5.1 Théorème de Thalès

THÉORÈME 1.13. Soit deux droites d et d' sécantes en un point A; B et M deux points de d distinct de A et C et N deux points de d' distinct de A (A, B et M alignés dans le même ordre que A, C et N). Alors :

$$(BC)//(MN) \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Démonstration. $\diamondsuit$



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathcal{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathcal{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathcal{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathcal{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathcal{A}(MFB) = \mathcal{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(BMF) + \mathcal{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CMN) = \mathcal{A}(CFN) + \mathcal{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. □

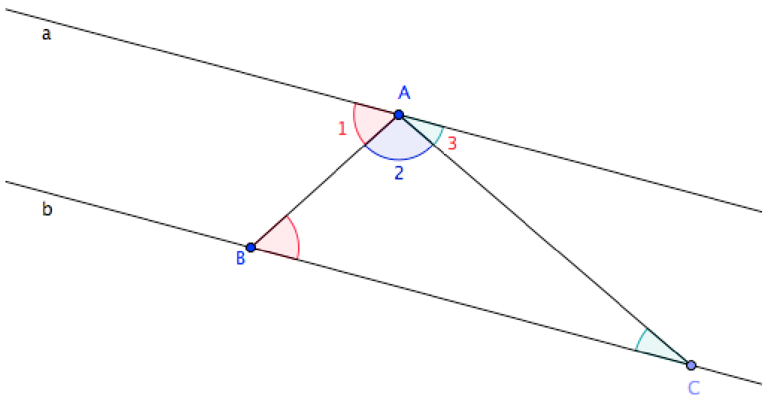
2 Relations angulaires dans le triangle

2.1 Somme des angles dans un triangle

PROPRIÉTÉ 2.1. Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

Démonstration. ◊

Soit ABC un triangle. On note $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.



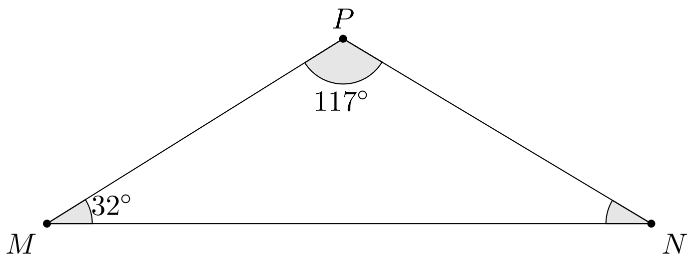
On trace (d) la droite parallèle à (BC) passant par A. Soit D un point « à gauche » de A sur la droite (d) et E un point « à droite » de A sur la droite (d).

Comme (d) est parallèle à (BC), les angles alternes-internes qui forment sont égaux. Ainsi les angles β et $\widehat{DAB}$ sont de même mesures (de même pour γ et $\widehat{EAC}$). Les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{EAC}$ sont adjacents et forment tous les trois un angle droit. Ainsi :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = \beta + \alpha + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

□

Exemple 2.2. Dans la figure ci-dessous, on veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$.



Dans le triangle MNP, on a :

$$\widehat{MPN} + \widehat{NMP} = 117^\circ + 32^\circ = 149^\circ.$$

Or, dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°. Donc : $\widehat{MNP} = 180^\circ - 149^\circ = 31^\circ$.

2.2 Trigonométrie dans un triangle rectangle

Définition 2.3. Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

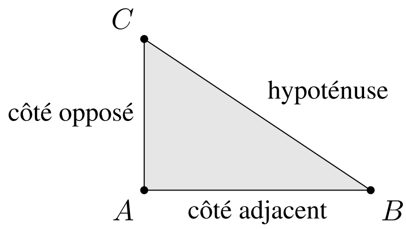


FIGURE 3 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 2.4. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \ \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \ \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

PROPRIÉTÉ 2.5. Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

2.3 Formules trigonométriques

PROPRIÉTÉ 2.6. Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

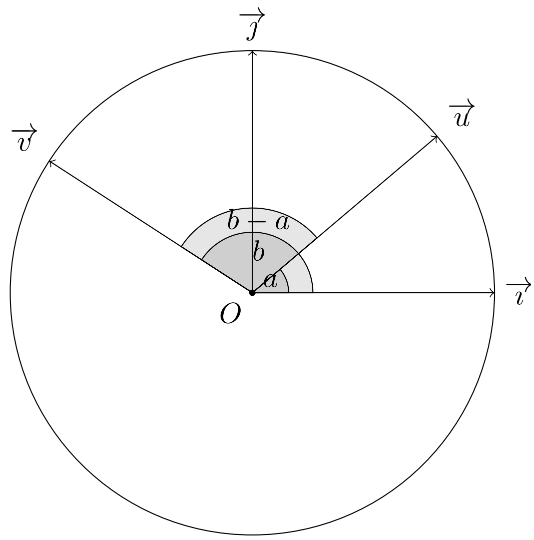
PROPOSITION 2.7 (FORMULES D'ADDITION).

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

$\diamondsuit$ *Justification d'une formule de trigonométrie.*

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$



Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

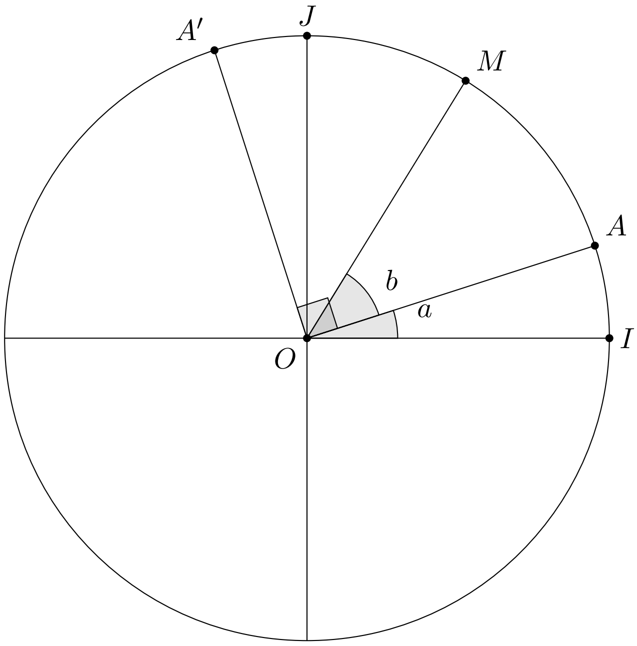
D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$.



D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

□

PROPOSITION 2.8 (FORMULES DE DUPLICATION).

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

◊ *Démonstration de la proposition 2.8.*

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

□

Proposition 2.9 (Formule de linéarisation). 1. $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,

2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

◊ *Démonstration de la proposition 2.9.* On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

Exemple 2.10. On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

s

3 Applications

Exemple 3.1. On considère trois carrés disposés comme dans la figure 4. Montrer que $\alpha = \beta + \gamma$. On a bien sûr $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On montre donc que $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. D'après une formule d'addition :

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma.$$

Or, si l'on note a la longueur des côtés des carrés, on a (d'après le théorème de Pythagore et les relations du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle) :

$$\begin{aligned}\cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et comme $0 < \beta + \gamma < \pi$, on a bien $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

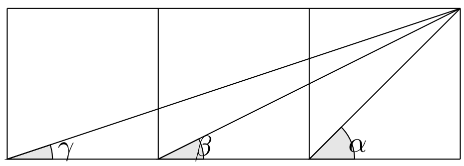


FIGURE 4 – Figure de l'exemple

Exemple 3.2. Soit ABC un triangle avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ de ABC.

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Donc :

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On remplace par les valeurs numériques :

$$\cos\widehat{A} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8}.$$

Or $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$, donc :

$$\sin^2\widehat{A} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}.$$

Or ABC étant un triangle, l'angle $\widehat{A}$ est compris entre 0 et π rad donc son sinus est positif. D'où :

$$\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Enfin, d'après la formule de l'aire du triangle, on obtient :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Exemple 3.3. Soit ABC un triangle avec $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60^\circ$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49.$$

D'où $a = 7$. On peut déterminer $\cos\widehat{B}$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13}{14}.$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in \left]0\,,90\right[$. On calcule donc $\widehat{B} = \arccos\frac{13}{14} \simeq 21,8^\circ$. On peut calculer $\widehat{C}$ avec la relation $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Ainsi :

$$\widehat{C} = 180 - 21,8 - 60 = 98,2^\circ.$$

Exemple 3.4 (Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un cercle).. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle $\mathcal{C}$.

On note O le centre du cercle et soit I et K deux points diamétralement opposés. Soit M un point mobile sur le cercle et on note x une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Enfin, on note M' le point diamétralement opposé à M. D'après la formule de l'aire d'un triangle exprimée avec un sinus :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2} OM \times OI \sin x.$$

Comme le rayon du cercle est égal à 1 :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Enfin, les diagonales d'un rectangle partagent celui-ci en quatre triangles de même aire (puisque la médiane dans un triangle partage celui-là en deux triangles de même aire) donc :

$$\mathcal{A}(MKM'I) = 2\sin x.$$

L'aire du rectangle inscrit dans le cercle est donc maximale lorsque le sinus l'est, à savoir pour $x = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré ; l'aire maximale est alors de 2 cm^2.

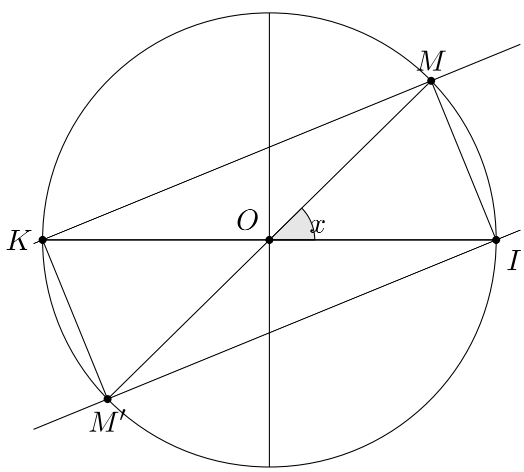


FIGURE 5 – Figure de l'exemple

Exemple 3.5 (Formule de Héron).. Soit ABC un triangle de demi-périmètre p (p est défini par la relation $2p = a + b + c$). On montre que l'aire $\mathcal{S}$ de ABC est donnée par :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(formule de Héron).}$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
1-\cos\widehat{A} &= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} \\
&= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \\
1+\cos\widehat{A} &= 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sin^2\widehat{A} &= 1-\cos^2\widehat{A} \\
&= (1-\cos\widehat{A})(1+\cos\widehat{A}) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}{4b^2c^2} \\
4b^2c^2\sin^2\widehat{A} &= (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

En outre,

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

D'où la formule de Héron.

Exemple 3.6 (Inégalités dans le triangle).. Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$. On va montrer que :

$$|b-c| \le a \le b+c.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A} \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$-2bc \le a^2-b^2-c^2 \le 2bc.$$

D'où $(b-c)^2 \le a^2 \le (b+c)^2$. Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0\,, +\infty[$, on obtient :

$$|b-c| \le |a| \le |b+c|\,.$$

Comme a, b et c sont des quantités positives :

$$|b-c| \le a \le b+c.$$

Autres applications :

Exemple 3.7. On construit un puit de pétrole P. À 530 m du coin du champ rectangulaire, à 210 m du coin C opposé, à 105 m du coin B.

À quelle distance se trouve-t-il du quatrième coin ?

Exemple 3.8. On considère un triangle ABC. On construit les carrés $ABEF$ et $ACGH$ extérieurement au triangle.

Montrer que $FC = BH$.