LEÇON N° 12

# Droites et plans dans l'espace.

Clément BOULONNE

Session 2020

## Préambule

### Niveau de la leçon

Collège, Terminale S

### Prérequis

Droites dans le plan, résolution de systèmes linéaires, vecteurs, équations cartésiennes, équations paramétrique. Thalès dans le plan et position relatives de deux droites dans le plan

### Références


- S. MEHL, *Droites du plan, étude analytique élémentaire*. URL : http://serge.mehl.free.fr/anx/dtes_p.thml.
- C. PARFENOFF, *Droites parallèles. Droites sécantes.* Seconde. URL http://www.parfenoff.org/pdf/seconde/geometrie/2de_Droites_paralleles_Droites_secantes.pdf.
- D. PERRIN, *Droites du plan.* URL : http://math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/droites2012.pdf.
- M. HAMED, *Leçon 24 : Droites du plan.*
- P. LUX, *Droites et plans dans l'espace*. URL : http://pierrelux.net/documents/cours/2/espace.pdf.
- J.-L. ROUGET, *Droites et plans de l'espace*. URL : http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/FichesCours/DroitesPlansEspace.pdf.
- C. ROSSIGNOL, *Droites et plans de l'espace*. URL : http://www.ac-grenoble.fr/lycee/vincent.indy/IMG/pdf/droites_plans_espace.pdf.


## Table des matières

# 1 Généralités sur les droites

## 1.1 Une définition

**Définition 1.1.** Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble :

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{P},\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \right\}$$

est appelé *droite* passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

**PROPOSITION 1.2.** Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u}$ une droite du plan, $B \in \mathcal{P}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul.
$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{v})$ si et seulement si $B \in D(A\vec{u})$ et $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$.

**Conséquence 1.3.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(A', \vec{v})$ sont sécantes en un unique point.

# 2 Droites et plans de l'espace

Pour travailler dans l'espace (ou la troisième dimension), il est nécessaire de se fixer quelques axiomes.

**Axiome 2.1.** Par deux points distincts passe une seule droite. Deux points distincts déterminent une droite.

**Définition 2.2 (Points alignés).** On dit que des points sont *alignés* s'ils appartiennent à la même droite.

**Axiome 2.3.** Par trois points non alignés passe un seul plan.

**Définition 2.4 (Points coplanaires).** Si plusieurs points de l'espace appartiennent à un même plan, on dit qu'ils sont coplanaires.

**Axiome 2.5.** Si $A$ et $B$ sont deux points du plan $\mathcal{P}$ alors tous les points de la droite $(AB)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

**Axiome 2.6.** Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

**Définition 2.7 (Intersection de deux plans).** Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

**Axiome 2.8.** Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

*Remarque 2.9.* Un plan peut être défini par :
- un point et une droite ne passant par ce point,
- deux droites sécantes,

## 2.1 Droites et plans

**Définition 2.10 (Droite).** On appelle $\mathcal{D}$, une droite, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point $A$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3,\ \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \right\}.$$

On note alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$.

**Définition 2.11 (Plan).** On appelle $\mathcal{P}$, un plan, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point $A$ et deux vecteurs non nuls linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant :

$$\mathcal{P} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3,\ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \right\}.$$

On note alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés *vecteurs directeurs* de $\mathcal{P}$.

*Remarques 2.12.*
1. Une droite est parfaitement définie par la donnée de deux points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.
2. Un plan est parfaitement définie par la donnée de trois points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.

**PROPOSITION 2.13.** Soit $\mathcal{P}$ un plan. Il existe un point $A$ et un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathcal{P} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \right\}.$$

On dit alors que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* au plan $\mathcal{P}$.

*Démonstration.* $\Diamond$ Considérons $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Prenons $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Procédons par double inclusion :
- Si $M \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
- D'autre part $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ alors $\overrightarrow{AM}$ est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc $M \in \mathcal{P}$.

$\square$

Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ une droite et $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(a, b, c)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + k\alpha \\ y = b + k\beta \\ z = c + k\gamma \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

Ces systèmes sont appelés représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$).

**THÉORÈME 2.14.** Soit $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ tel que :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0.$$

Réciproquement, si $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble

$$\left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est un plan de vecteur normal $\vec{n}(p, q, r)$.

*Démonstration.* $\Diamond$ Soit $\mathcal{P}(A, \vec{n})$ un plan avec $\vec{n}(p, q, r)$ et $A(a, b, c)$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)p + (y - b)q + (z - c)r = 0 \end{aligned}$$

En posant $s = -pa - qb - rc$, nous avons donc l'implication.

Réciproquement, on montre facilement que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est non vide (si $r \neq 0$, il contient $(0, 0, \frac{s}{r})$).

Soit $A(a, b, c) \in \mathcal{E}$, alors $s = -ap - bq - cr$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0 \\ &\Leftrightarrow px + qy + rz + (-ap - bq - cr) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)p + (y - b)q + (z - c)r = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A, \vec{n}) \end{aligned}$$

où $\vec{n}(p, q, r)$ est un vecteur normal au plan. Donc $\mathcal{E}$ définit bien un plan. $\square$

**Définition 2.15.** L'équation $px + qy + rz + s = 0$ est appelée *équation cartésienne* de $\mathcal{P}$.

## 2.2 Positions relatives

**THÉORÈME 2.16.** Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans, de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

1. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont soit strictement parallèles, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit confondus.
2. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les deux plans sont sécants et l'intersection est une droite de vecteur directeur un vecteur normal à $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

*Démonstration.* $\Diamond$ Posons $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n}'(a, b, c)$. Supposons $\vec{n}' = k\vec{n}$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P}' &\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z = d' = 0 \\ &\Leftrightarrow kax + kby + kcz + d' = 0 \\ kd + d' = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $d' = kd$, on a bien $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Sinon $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.

Supposons $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. On peut aussi supposer sans perte de généralités, $a \neq 0$.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \quad (1) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad (2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \quad (1) \\ \underbrace{(a'b-ab')}_{\alpha}y+\underbrace{(a'c-ac')}_{\beta}z+\underbrace{(ad-ad')}_{\gamma}=0 \quad (3) \leftarrow a'(1)-a(2) \end{cases}$$

Puisque $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires, on peut supposer sans perte de généralités, $\alpha \neq 0$, on obtient alors :

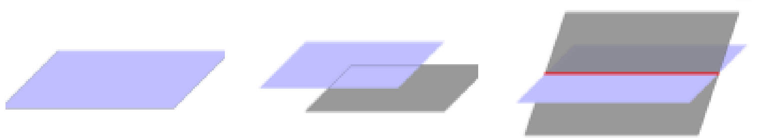
$$\begin{cases} x = \dfrac{b\beta - c\alpha}{a\alpha}z + \dfrac{b\gamma - d\alpha}{a\alpha} \\ y = -\dfrac{\beta}{\alpha}z - \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ z = z \end{cases}$$

Ce qui bien l'équation d'une droite. □

Toute droite peut donc être vue comme l'intersection de deux plans, c'est-à-dire comme l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} px+qy+rz+s=0 \\ p'x+q'y+r'z+s'=0 \end{cases}$$

où $(p,q,r)$ et $(p',r',q')$ ne sont pas proportionnels. On appelle ce système *équation cartésienne* de la droite.



**Définition 2.17.** $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ (il peut être engendré par les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$).

**PROPOSITION 2.18.** Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ alors soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Sinon, l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ est un point.

*Démonstration.* ♢

Soit $\mathcal{P}(A,\vec{u}) \cap \mathcal{D}(B,\vec{n}) = \emptyset$, soit il existe au moins un point en commun disons $I$. Puisque le vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ alors :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \lambda\vec{u} \Rightarrow M(x,y,z) \in \mathcal{P}.$$

Ce qui montre le premier point.

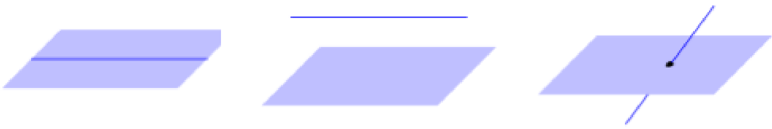
Si la droite et le plan ne sont pas parallèles, alors prenons $M$ un point $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, on a :

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}},$$

ce qui définit bien un unique point $M$. □



**Définition 2.19.** Deux droites sont dites *coplanaires* s'il existe un plan $\mathcal{P}$ les contenant toutes les deux.

**Définition 2.20.** Deux droites sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

**PROPOSITION 2.21.** Deux droites parallèles ou sécantes sont toujours coplanaires.

*Démonstration.* ◇

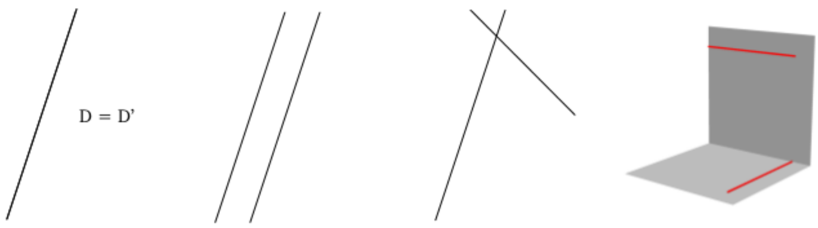
Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A', \vec{u}')$.

— Si les droites sont parallèles, il suffit de prendre le plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \overrightarrow{AA'})$.

— Si les droites sont sécantes, en notant $I$ le point d'intersection, il suffit de prendre $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{u}')$.

□

*Remarque 2.22.* Deux droites peuvent donc ne pas avoir de points d'intersection sans être pour autant parallèles.

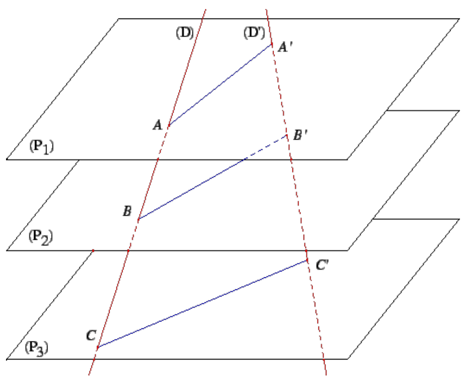



## 2.3 Applications

### 2.3.1 Théorème de Thalès

**THÉORÈME 2.23 (THÉORÈME DE THALÈS).** Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ trois plans strictement parallèles de l'espace, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles aux plans $\mathcal{P}_i$. Posons $A_i = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}$ et $A'_i = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}'$ alors on a :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_3}}{\overline{A'_1A'_2}}.$$



*Démonstration.* $\Diamond$ Si $\mathcal{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A_1', \vec{u}')$ sont coplanaires, on a l'égalité par le théorème de Thalès dans le plan.

Si $\mathcal{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A_1', \vec{u})$ ne sont pas coplanaires, on considère $\mathcal{D}''(A_1', \vec{u})$ et on pose $A_i'' = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}''$.

$A_1' \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}''$ donc $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont coplanaires.

$$\frac{\overline{A_1'A_3}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_1''A_3''}}{\overline{A_1''A_2''}}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour vecteur directeur $\vec{u}$, elles sont parallèles et donc coplanaires elles aussi. D'après le théorème de Thalès dans le plan, on a là aussi :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_1''A_3''}}{\overline{A_1A_2}}.$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'A_3'}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$

$\square$

### 2.3.2 Application du théorème des trois perpendiculaires

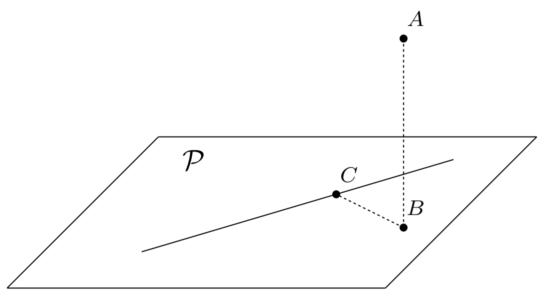
**THÉORÈME 2.24.** Soit $\mathcal{D}$ une droite contenue dans un plan $\mathcal{P}$ et $A$ un point extérieur à $\mathcal{P}$. On appelle $B$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{P}$ et $C$ le projeté orthogonal de $B$ sur $\mathcal{D}$. Alors $(AC)$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

*Démonstration.* $\Diamond$ Par hypothèse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{car } \vec{u} \text{ est dans la direction de } \mathcal{P}. \end{cases}$$

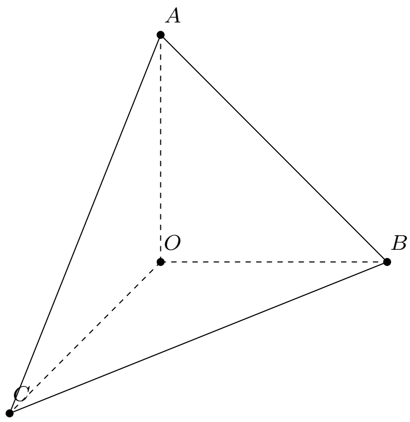
Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = 0$.

Les droites sont donc orthogonales. Comme $C$ appartient à $(AC)$ et à $\mathcal{D}$ alors elles sont perpendiculaires. $\square$




**PROPOSITION 2.25 (RÉSULTAT DE DESCARTES).** Soit $(OABC)$ une pyramide rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Alors :

$$\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2.$$




*Démonstration.* $\Diamond$

D'après le théorème des trois perpendiculaires, $A$ et $O$ ont le même projeté sur $(BC)$, disons $I$. On utilise alors le théorème de Pythagore dans les triangles $AOI$ et $OBC$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2_{ABC} - \mathcal{A}^2_{OBC} &= \frac{1}{4}(IA^2 \times CB^2 - IO^2 \times BC^2)\\ &= \frac{1}{4} \times CB^2 \times (IA^2 - IO^2)\\ &= \frac{1}{4} \times CB^2 \times AO^2\\ &= \frac{1}{4}(CO^2 + OB^2) \times AO^2\\ &= \mathcal{A}^2_{AOC} + \mathcal{A}^2_{AOB}.\end{aligned}$$

$\square$

### 2.3.3 Distance d'un point à un plan

**Définition 2.26 (Distance d'un point à un plan).** Soient $\mathcal{P}$ un plan et $M_0$ un point. La distance de $M_0$ au plan $\mathcal{P}$ est la distance de $M_0$ au projeté orthogonal $H$ du point $M_0$ sur le plan $\mathcal{P}$. Cette distance est la plus courte distance de $M_0$ à un point quelconque de $\mathcal{P}$.

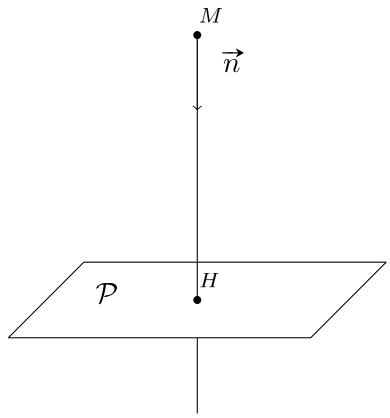
**PROPOSITION 2.27.** Si dans un repère orthogonal le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels $a$, $b$ et $c$ n'étant pas nul) et $M_0$ a pour coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ alors la distance de $M_0$ à $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

*Démonstration.* $\Diamond$ On a vu que l'équation cartésienne d'un plan relativement à un repère orthonormé est de la forme :

$$ax + by + cz + k = 0$$

où $a$, $b$ et $c$ sont les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.




Soit donc $\mathcal{P}$ un plan d'équation

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + k = 0$$

$M$ de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma)$ un point quelconque de l'espace (situé ou non dans le plan $\mathcal{P}$). La droite passant par $M$ et orthogonale à $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$ en $H$ de coordonnées $(x_H, y_H, z_H)$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées $a$, $b$ et $c$.

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ lui aussi orthogonal à $\mathcal{P}$ a donc pour coordonnées $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La distance du point $M$ au plan $\mathcal{P}$ est donc :

$$MH = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il faut donc déterminer $\lambda$. Puisque $H$ appartient au plan $\mathcal{P}$, on a :

$$ax_H + by_H + cz_H + k = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $(x_H - \alpha, y_H - \beta, z_H - \gamma)$ qui sont égales à $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. Donc :

$$x_H = \lambda a + \alpha, \quad y_H = \lambda b + \beta, \quad z_H = \lambda c + \gamma.$$

En remplaçant dans l'équation $ax_H + by_H + cz_H + k = 0$, on obtient :

$$a(\lambda a + \alpha) + b(\lambda b + \beta) + c(\lambda c + \gamma) + k = 0.$$

D'où :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (a\alpha + b\beta + c\gamma + k) = 0,$$

et donc :

$$\lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + k}{a^2 + b^2 + c},$$

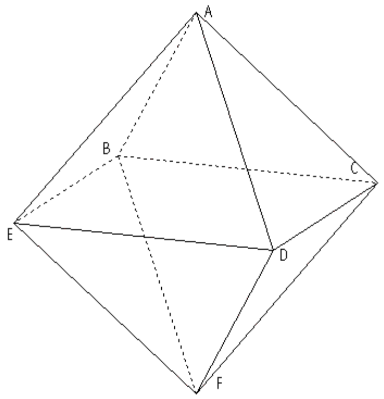
le dénominateur n'étant pas nul puisque $\vec{n}$ ne l'est pas. Donc :

$$MH = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

### 2.3.4 Distance entre deux plans opposés dans un octaèdre

**Exercice 2.28.** Soit $ABCDEF$ un octaèdre dessiné ci-dessous :




Déterminer la distance entre les plans $(ABE)$ et $(FDC)$.