LEÇON N° 10

Géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Éléments de base de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace

Références

— P. TAQUET & al., *Mathématiques. BTS Groupement A*. Hachette Technique 2010.
— Collectif de professeurs SESAMATHS. *Sesamaths Suisse Romande, 2nde*. Magnard, 2013.
— Collectif de professeurs SESAMATHS. *Sesamaths, Term S*, Magnard, 2013.

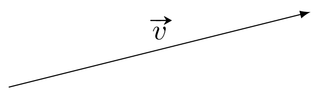
Table des matières

1 Définition d'un vecteur

Définition 1.1. Un *vecteur* est la donnée de :
- une direction ;
- un sens ;
- une longueur, aussi appelé *norme* et notée $\|\vec{v}\|$.

On représente un vecteur avec une flèche.

Le vecteur qui a une longueur nulle est appelé *vecteur nul* et est noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction, ni sens ; sa norme est égale à 0.



Remarques 1.2.
- On peut considérer des vecteurs aussi bien dans le plan que dans l'espace ;
- la direction est la notion la plus complexe à comprendre ; on peut se la représenter comme un faisceau de droites parallèles ;
- un vecteur n'est donc à priori pas positionné dans le plan ou dans l'espace de façon univoque ; lorsqu'on choisit de réprésenter un des vecteurs parmi l'infinité de ceux qui ont même direction, sens et norme, on dit qu'on a choisit un *représentant* de ce vecteur.

Définition 1.3 (Vecteur entre deux points). Soient A et B sont deux points (du plan, de l'espace) et d_{AB} la droite passant par A et B.

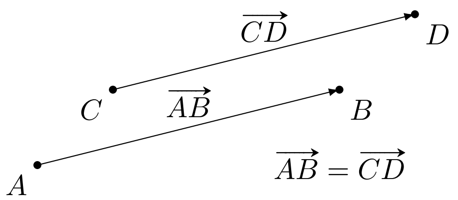
$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur dont la direction est donnée par d_{AB} (aussi appelée le *support* de $\overrightarrow{AB}$), le sens en considérant A comme origine et B comme extrémité, et dont la norme est égale à celle du segment $[AB]$.

Définition 1.4 (Vecteur entre deux points, définition 2nde). À chaque translation (déplacement d'un point vers un autre) est associé un *vecteur*. Pour A et B deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B. La notation « vecteur $\overrightarrow{AB}$ » regroupe les trois informations la définissant : la direction (celle de la droite (AB)), le sens (de A vers B) et la longueur AB. A est l'*origine* du vecteur et B son *extrémité*.

Définition 1.5. Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits égaux.

Deux vecteurs égaux ont :
- même direction ;

— même sens ;
— même longueur.



PROPRIÉTÉ 1.6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Définition 1.7 (Vecteur opposé). Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ de la translation qui transforme B en A est appelé *vecteur opposé* à $\overrightarrow{AB}$.

Remarque 1.8. Deux vecteurs *opposés* ont même direction, même longueur mais sont de sens contraires.

2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Addition

Définition 2.1 (Composition de translations). L'enchaînement de deux translations est également une translation.

PROPRIÉTÉ 2.2 (RELATION DE CHASLES). Soit A, B et C trois points. L'enchaînenement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Remarque 2.3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

PROPRIÉTÉ 2.4. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. Alors :
— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
— $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ 2.5 (PROPRIÉTÉ DU PARALLÉLOGRAMME). Soit A, B, C et D quatre points. Dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.

Démonstration. ◊ On suppose que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. On utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

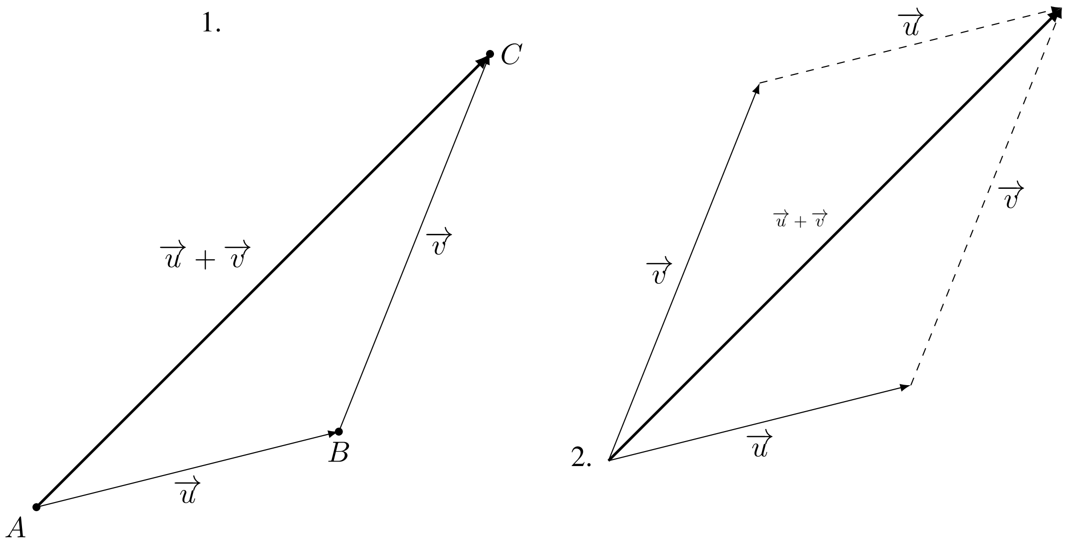
On ajoute $\overrightarrow{CA}$ aux deux membres de l'égalité :

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.$$

On utilise à nouveau la relation de Chasles avec $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$. Donc, la relation de départ est équivalente à $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $ABDC$ est un parallélogramme. □

Méthode 2.6 (Construction de la somme de deux vecteurs).
1. On choisit des représentants de ces vecteurs, de telle sorte que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$
   $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur dont $\overrightarrow{AC}$ (le vecteur résultat) est un représentant.
2. On choisit des représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ayant même origine et on complète la figure pour

obtenir un parallélogramme ;
$\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur dont la diagonale du parallélogramme est un représentant.



2.2 Soustraction

Définition 2.7. Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

2.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition 2.8. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, et soit λ un nombre réel. Le produit $\lambda\vec{u}$ est le vecteur :
- qui a même direction que le vecteur $\vec{u}$;
- dont la norme est $|\lambda|$ fois la norme du vecteur $\vec{u}$;
- dont le sens est celui de $\vec{u}$ si λ est positif et de sens opposé à celui de $\vec{u}$ si λ est négatif.

Remarque 2.9. On peut définir *l'opposé* du vecteur $\vec{u}$ comme étant le vecteur $(-1) \cdot \vec{u}$.

3 Coordonnées d'un vecteur

Définition 3.1 (Vecteur du plan dans un repère orthonormé). Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. On considère ce plan muni d'un repère orthonormé d'origine $O(0;0)$ et des deux vecteurs $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On note v_1 l'accroissement horizontal de $\vec{v}$ le long de l'axe des abscisses (avec un signe pour indiquer qu'on respecte oun non l'orientation de l'axe) et v_2 l'accroissement vertical de $\vec{v}$ le long de l'axe des ordonnées (avec signe).

On a :

$$\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath}$$

et on note $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ pour le vecteur $\vec{v}$ dans ce repère ; on appelle v_1 et v_2 les composantes du vecteur $\vec{v}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

Définition 3.2 (Vecteur de l'espace dans un repère orthonormé). De la même façon que dans le plan, on a besoin pour repérer un point dans l'espace d'une origine O, de trois axes ordonnées et des trois vecteurs :

$$\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

perpendiculaires deux à deux. On nomme x l'abscisse, y l'ordonnées et z la côte.

Un vecteur de l'espace est caractérise par v_1 son accroissement le long de l'axe des abscisses, v_2 son accroissement le long de l'axe des ordonnées et v_3 son accroissement le long de l'axe des côtes. Un vecteur de l'espace s'écrit alors : $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$ ou plus simplement :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}.$$

Dans ce qui va suivre, nous allons considérer des vecteurs dans le plan. On peut généraliser les définitions et propriétés très facilement dans l'espace.

PROPRIÉTÉ 3.3. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

PROPRIÉTÉ 3.4. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme. Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu.

$$\begin{cases}\dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2}\\[2ex] \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_0}{2}\end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases}x_A + x_M = x_B\\ y_A + y_M = y_B\end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases}x_M = x_B - x_A\\ y_M = y_B - y_A\end{cases}$$

□

PROPRIÉTÉ 3.5. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Si de plus, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

PROPRIÉTÉ 3.6 (SOMME DE DEUX VECTEURS). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x + x'\\y + y'\end{pmatrix}$.

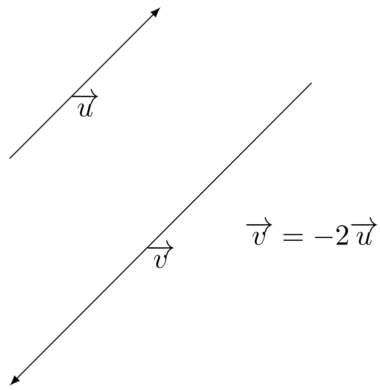
PROPRIÉTÉ 3.7 (MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE). Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et λ un réel. La multiplication de $\vec{u}$ par λ est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

4 Colinéarité de deux vecteurs

4.1 Propriété caractéristique

Définition 4.1. Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemple 4.2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$.



Remarques 4.3.
— Deux vecteurs non nuls sont colinéaires, si et seulement si, ils ont la même direction.
— Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemples 4.4. $\Diamond$

1. $\vec{u}(\frac{1}{3}; -\frac{3}{5})$ et $\vec{v}(\frac{2}{9}; -\frac{1}{5})$ sont colinéaires, en effet :
$$\frac{2}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{-3}{5},$$
donc $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$.
2. $\vec{u}(4; 5)$ et $\vec{v}(8; -10)$ ne sont pas colinéaires car $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ alors $8 = \lambda \times 4$ donc $\lambda = 2$ et $-10 = \lambda \times 5$ donc $\lambda = -2$. C'est absurde ! Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

PROPRIÉTÉ 4.5. Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

Exemples 4.6. $\Diamond$

1. On veut montrer que $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(10; -15)$ sont colinéaires.
$$2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
2. On veut montrer que $\vec{u}(7; -4)$ et $\vec{v}(14; 8)$ ne sont pas colinéaires.
$$7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0.$$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Démonstration. $\lozenge$ Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors, par hypothèse, il existe un réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, cela se traduit sur les coordonnées par : $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. D'où :

$$xy' - yx' = x\lambda y - y\lambda x = \lambda xy - \lambda xy = 0.$$

Si l'un des vecteurs est nul alors la relation est clairement vérifiée.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\vec{u}$ non nul, l'une de ses coordonnées est donc non nulle.

— Si $x \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire : $y' = \frac{x'}{x}y$, c'est-à-dire $y' = \lambda y$ avec $\lambda = \frac{x'}{x}$. Et comme $\frac{x'}{x} \times x = x'$, on a aussi $x' = \lambda x$. Donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{v}(\lambda x; \lambda y)$, on a donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

— Si $y \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire $x' = \frac{y'}{y} \times x$ et on reprend le même raisonnement que plus haut.

On peut aussi supposer que $\vec{u}$ est nul alors $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

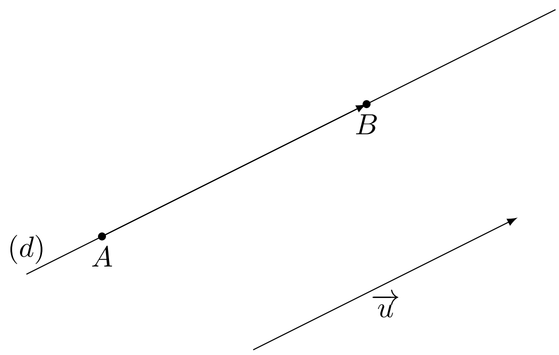
$\square$

Remarque 4.7. $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ ne sont pas colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' \neq 0$.

4.2 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 4.8. On dit que $\vec{u}$ (vecteur non nul) est un *vecteur directeur* d'une droite (d) s'il exist deux points distincts A et B de cette droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple 4.9. A et B sont sur la droite (d), $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



THÉORÈME 4.10. Soit (d) une droite et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). Soit $\vec{v} \neq 0$ un vecteur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d).

L'ensemble des vecteurs directeurs de (d) est $\left\{\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},\ \exists k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}\right\}$.

Exemple 4.11. $\lozenge$ Le vecteur $\vec{u}(-2; 3)$ est un vecteur directeur de la droite (d) dont une équation cartésienne est $3x + 2y + 5 = 0$.

Le vecteur $\vec{v}(-8; 12)$ est colinéaire au vecteur (en effet, $\vec{v} = 3\vec{u}$). Alors $\vec{v}$ est aussi un veceteur directeur de la droite (d).

Les vecteurs directeurs de (d) sont de la forme; $(-2k; 3k)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Conséquence 4.12. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de deux droites (d) et (d'). Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

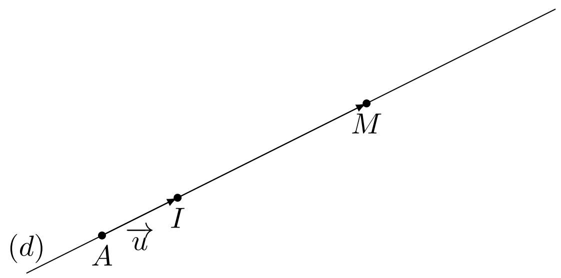
Exemple 4.13. $\lozenge$ Soit (d) la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 8)$ et (d') la droite de vecteur directeur $\vec{v}(6; -16)$. On veut montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

PROPRIÉTÉ 4.14. A, B et C sont trois points alignés si et seulement si deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ 4.15. (d) est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. La droite (d) est l'ensemble des points M du plan, tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration. $\Diamond$



Soit I le point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$. M appartient à la droite (d), si et seulement si, les points A, I et M sont alignés. Or A, I et M sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Comme $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$ alors A, I et M sont alignés si et seulement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

On a démontré que M appartient à la droite (d) si, et suelement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. $\square$

5 Produit scalaire, orthogonalité

5.1 Définition dans le plan

Définition 5.1 (Produit scalaire). On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 .\right]$$

Remarque 5.2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

THÉORÈME 5.3. Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 5.3.* On a : $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ et donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)\right] = xx' + yy'.$$

$\square$

Exemple 5.4. Soit $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (2, 6)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

5.2 Propriétés du produit scalaire

PROPRIÉTÉS 5.5. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
3. Pour tout réel k, $k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)
7. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$)
8. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
9. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$\Diamond$ *Démonstration des propriétés 5.5-1, 5.5-3 et 5.5-4.* 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \left[\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right] = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$. On utilise la formule du théorème 5.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = kx_2x_1 + ky_2y_1 = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) \\ &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).\end{aligned}$$

□

PROPRIÉTÉ 5.6. Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque 5.7. Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

5.3 Autres expressions

THÉORÈME 5.8. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

PROPRIÉTÉ 5.9. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls *colinéaires* :

1. S'ils ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. S'ils ont sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple 5.10. Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = 2$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 = 6$.

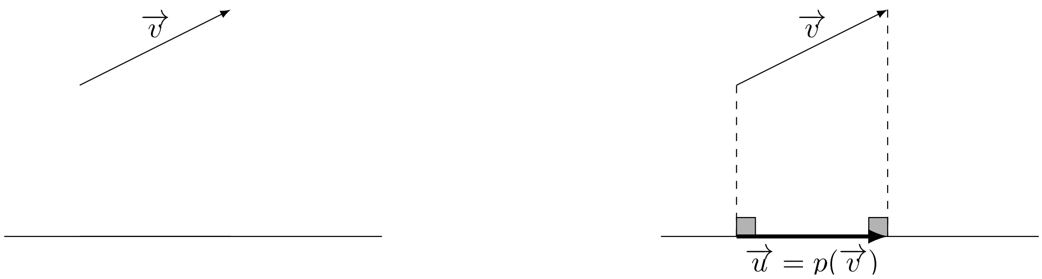


FIGURE 1 – Projection orthogonale du vecteur v sur une droite horizontale

PROPRIÉTÉ 5.11. Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$ alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v}).$$

Exemple 5.12.
- — $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- — $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- — $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- — Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

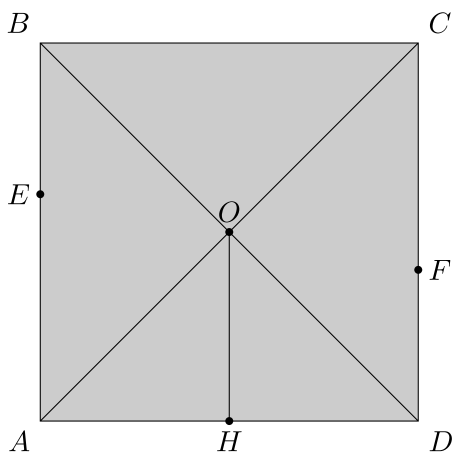


FIGURE 2 – Figure de l'exemple 5.12

Démonstration. $\Diamond$ On part du principe que l'on ait démontré :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

1. Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$. On pose $\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{\jmath}$ le vecteur tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$. Ainsi, nous avons ainsi construit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormale directe. Dans cette base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a, en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$:

$$\vec{u}(\|\vec{u}\|, 0) \ ; \ \vec{v}(\|\vec{v}\| \cos\theta, \|\vec{v}\|, \sin\theta) \ ; \ \vec{v'}(\|\vec{v}\| \cos\theta, 0)$$

où l'on note $\overrightarrow{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \overrightarrow{v'} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

D'où les formules des propriétés précédemment citées.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos\theta = 1$.

□

5.4 Vecteur normal à une droite

Définition 5.13. On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.

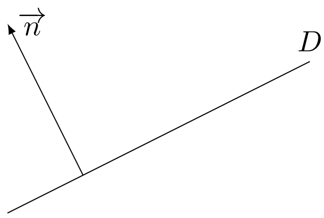


FIGURE 3 – Le vecteur n est normal à la droite D

THÉORÈME 5.14. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

THÉORÈME 5.15. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}(u, v)$ est normal à $\mathcal{D}$.

6 Géométrie dans l'espace

6.1 Vecteurs coplanaires

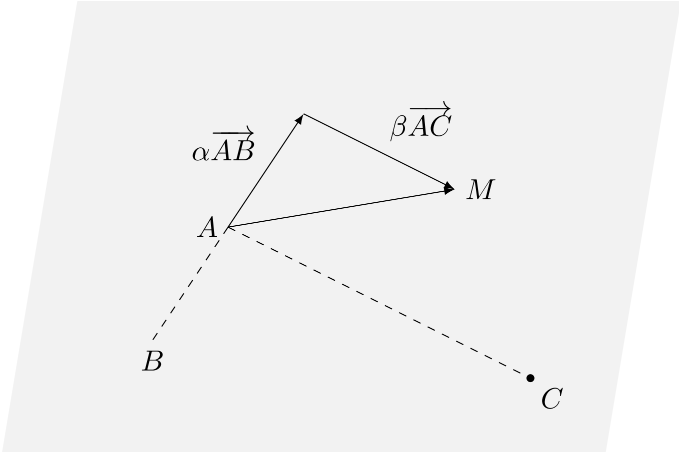
Définition 6.1 (Vecteurs coplanaires). Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont des extrémités B, C et D telles que A, B, C et D appartiennent à un même plan.

PROPRIÉTÉ 6.2 (CARACTÉRISTIQUE). A, B et C étant trois points non alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

avec α et β deux nombres réels.

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (ABC).



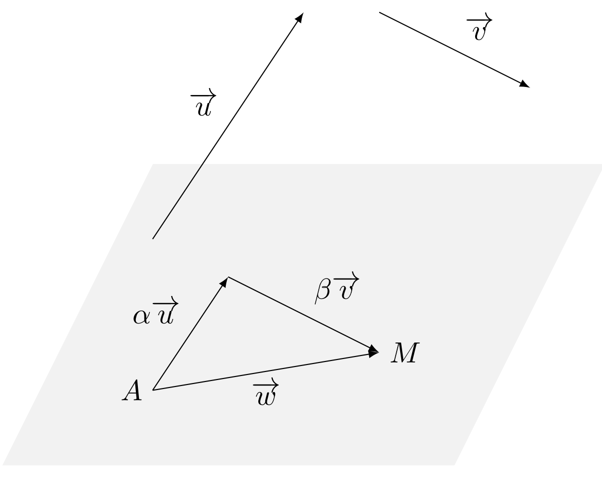
Démonstration. $\lozenge$ A, B et C ne sont pas alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc un repère du plan (ABC).

— Si M appartient à (ABC), alors M, A, B et C étant coplanaires, il existe α et β deux nombres tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
— Récirpoquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec α et β deux nombres réels, alors il existe un point N de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AC}$. M est donc un point de la droite parallèle à (AC) passant par N. Donc, comme $N \in (ABC)$, $M \in (ABC)$.

$\square$

PROPRIÉTÉ 6.3. Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$



Démonstration. $\lozenge$ Soit A, B, C et M les points de l'espace tels que $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C et M sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\square$

Méthode 6.4 (Démontrer que quatre points sont coplanaires). Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.

Méthode 6.5 (Démontrer que quatre points sont coplanaires avec les coordonnées). Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

6.2 Représentation paramétrique de droites et de plans

PROPRIÉTÉ 6.6. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. $M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}.$$

Démonstration. $\Diamond$ $M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t_\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}.$$

□

Définition 6.7. On dit que le système d'équation :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 6.8. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$. $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

Démonstration. $\Diamond$ $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha + t'\alpha' \\ y - y_A = t\beta + t'\beta' \\ z - z_A = t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

□

Définition 6.9. On dit que le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

Remarque 6.10. Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

6.3 Produit scalaire dans l'espace

Toutes les définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan peut être étendu à l'espace car :

Définition 6.11. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans le plan les contenant.

Définition 6.12 (Repère orthonormé de l'espace). Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

Définition 6.13 (Expression analytique du produit scalaire). Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

PROPRIÉTÉ 6.14 (ANGLE ET PRODUIT SCALAIRE). Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé et A, B et C trois points de l'espace. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Méthode 6.15 (Mesurer un angle grâce au produit scalaire). Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

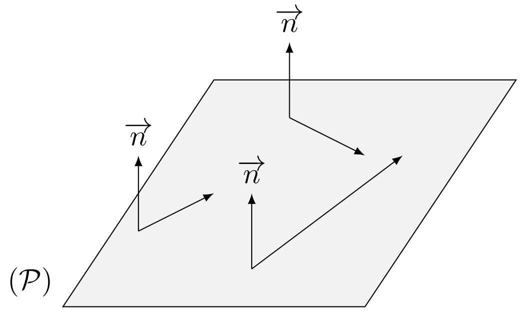
6.4 Vecteur normal à un plan

Définition 6.16. On dit que deux droites de l'espace sont *orthogonales* quand une parallèle de l'une est perpendiculaire à une parallèle de l'autre.

Remarque 6.17. Deux droites orthogonales dans l'espace n'ont pas nécessairement de point d'intersection.

Définition 6.18. On dit qu'une droite (d) orthogonale au plan $(\mathcal{P})$ quand (d) est orthogonale à tout droite de $(\mathcal{P})$.

Définition 6.19 (Vecteur normal). Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathcal{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathcal{P})$.



PROPRIÉTÉ 6.20. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

Démonstration. $\diamondsuit$ Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan. Par définition, (d) est orthogonale à $(\mathcal{P})$ si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$. Cela signifie que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur contenu dans $(\mathcal{P})$, autrement dit, que $\vec{u}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. $\square$

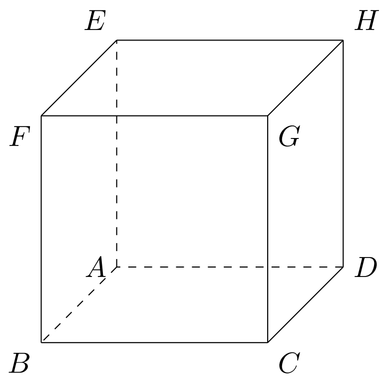
PROPRIÉTÉ 6.21. Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

Démonstration. $\diamondsuit$ Soient $(\mathcal{P})$ un plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul $\vec{n}$. Montrons que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathcal{P})$. On ramène $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à une même origine A : $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère de $\mathcal{P}$ et tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi :

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = \alpha u \cdot n + \beta v \cdot n = 0.$$

$\square$

Exemple 6.22. Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $a > 0$.



Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).

Exemple 6.23. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 1)$ et $B(-2; 0; 2)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan $(\mathcal{P})$ engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$. De plus $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

PROPRIÉTÉ 6.24. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathcal{P})$. Alors, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

Démonstration. $\Diamond$ Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}$. On montre que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathcal{P})$.

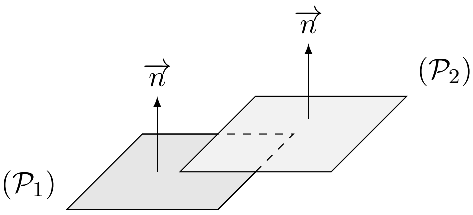
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $(\mathcal{P})$. Alors :

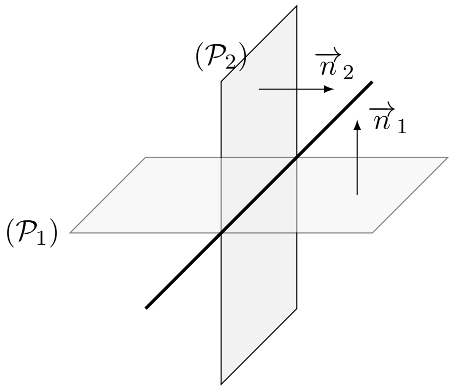
$$\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0.$$

$\square$

Remarque 6.25. La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathcal{P})$ est le point H appartenant à $(\mathcal{P})$ tel que (AH) soit orthogonale à $(\mathcal{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

PROPRIÉTÉ 6.26 (PARALLÉLISME ET PERPENDICULARITÉ DE PLANS).
— Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
— Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

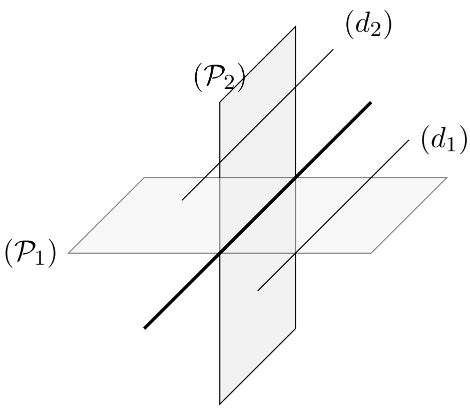




Exemple 6.27. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
— Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires : les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont donc parallèles.
— Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux pls de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires : les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont donc sécants, mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ne sont pas perpendiculaires.

Remarque 6.28. Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, deux plans perpendiculaires. Si (d_1) est une droite de $(\mathcal{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathcal{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Sur la figure ci-dessous, les deux droites (d_1) et (d_2) sont paralllles.



PROPRIÉTÉ 6.29. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors un point M appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Démonstration. $\Diamond$

— Si M appartient à $(\mathcal{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathcal{P})$ et est donc orthogonal à $\vec{n}$.

— Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. On considère H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$. Alors :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}.$$

D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathcal{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$. D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaire et donc :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM \text{ ou } -\|\vec{n}\| \times HM.$$

On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et aisni, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{HM} = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathcal{P})$.

□

6.5 Équation cartésienne d'un plan

PROPRIÉTÉ 6.30 (CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE D'UN PLAN). Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

— Si M appartient à un plan $(\mathcal{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

— Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathcal{P})$.

On dit que $(\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée *équation cartésienne* du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Démonstration. $\Diamond$

— Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à $(\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0 = 0.$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0$.

— a, b et c n'étnat pas simultanément nuls, il existe $A(x_0; y_0; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

— si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;

— si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On en déduit, d'après la propriété précédente que M appartient au plan passantpar A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$\square$

Exemple 6.31. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ et $(0; 0; 1)$.

— Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\imath}$.

— Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\jmath}$.

— Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.

Méthode 6.32 (Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)). Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Méthode 6.33 (Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)). Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathcal{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathcal{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exemple 6.34. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère on considère les points $I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 6.35 (Intersection d'une droite et d'un plan). Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
   (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;
   (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathcal{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Méthode 6.36 (Intersection de deux plans). Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :
   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre;
   (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

7 Barycentres de n points

7.1 Définition et premiers résultats

Définition 7.1 (Barycentres de n points). Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels tels que $a_1+a_2+\cdots+a_n \neq 0$ alors le point G tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

est appelé *barycentre* des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), ..., (A_n, a_n).

Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, on dit alors que G est l'*isobarycentre* des points A_1, A_2, ..., A_n.

PROPRIÉTÉ 7.2. Si M est un point quelconque et G est le barycentre des points pondérés (A_1, a_i) alors :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots a_n\overrightarrow{MA_n})$$

L'égalité précédente est appelée *forme réduite du barycentre*.

Démonstration. ◊ Soit M un point quelconque de l'espace. L'égalité (1) peut s'écrire :

$$a_1(\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{MG}) + a_2(\overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{MG}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{A_nM} + \overrightarrow{MG}) = \overrightarrow{0},$$

ce qui donne en changeant l'ordre des termes :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG} + a_1\overrightarrow{A_1M} + a_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_nM} = \overrightarrow{0},$$

d'où l'égalité. □

Exemple 7.3. Soit ABC un triangle, placer le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

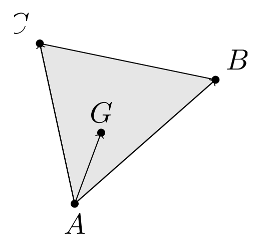
Démonstration. ◊ En utilisant le résultat précédent, on obtient :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Cette égalité étant vraie pour tout point M, elle est vraie en particulier pour $M = A$.

D'où :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$



□

7.2 Utilisation du barycentre partiel

THÉORÈME 7.4. Si G est le barycentre de n points pondérés, on peut remplacer p de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces points.

Démonstration. ◇ Considérons n points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n) tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Soit G le barycentre de ces points.

Considérons également le barycentre G_1 des p premiers points pondérés ($p < n$). Ce barycentre n'existe que si $a_1 + a_2 + \cdots + a_p \neq 0$.

D'après le théorème précédent, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\overrightarrow{MG_1} = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{MA_p} \quad \text{pour tout point } M.$$

Cette égalité est vraie en particulier pour $M = G$, d'où :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{GG_i} = a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{GA_p}. \tag{2}$$

L'égalité qui définit le point G s'écrit :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{GA_p} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

En utilisant le résultat de l'égalité (2) précédente, on obtient :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)\overrightarrow{GG_1} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

G est donc le barycentre de $(G_1, a_1 + \cdots + a_p)$, (A_{p+1}, a_{p+1}), …, (A_n, a_n). □

Exemple 7.5. Montrer que l'isobarycentre des trois sommets d'un triangle est le point de concours de ses médianes (donc son centre de gravité).

Retrouver le résultat « dans un triangle le centre de gravité se situe aux $\frac{2}{3}$ de chacune des médianes à partir des sommets ».

Solution. ◇ Soit ABC un triangle. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Soit A' le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ (A' est le milieu de $[BC]$), d'après le théorème précédent, G est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 2)$, G se situe donc sur la médiane (AA'). De la même manière, si on note C' le milieu de $[AB]$, on obtiendra le fait que G se situe sur la médiane (CC').

G est l'intersection de deux médianes, il s'agit bien du centre de gravité du triangle. De plus G est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 2)$, on a donc pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'}),$$

et pour $M = A$, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

G se situe donc aux $\frac{2}{3}$ de $[AA']$ en partant du sommet A. Un raisonnement analogue permettrait de montrer que G se situe aux $\frac{2}{3}$ de chacune des deux autres médianes. □

7.3 Coordonnées du barycentre

THÉORÈME 7.6 (COORDONNÉES DU BARYCENTRE). Soit A_1, A_2, …, A_n n points dans l'espace. On note, pour tout $1 \leq i \leq n$, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i. Le barycentre G du système pondéré (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i},\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i},\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Démonstration. ◊ On reprend les notations du théorème. En remplaçant M par O dans l'égalité :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n}),$$

on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{OA_1} + a_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{OA_n}),$$

d'où le résultat. □

Exemple 7.7. Dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne :

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 1, 0) \quad \text{et} \quad C(-3, 1, 0).$$

On cherche les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Solution. ◊ Le centre de gravité est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Donc :

$$x_G = \frac{1+2-3}{3}, \quad y_G = \frac{1+1+1}{3}, \quad z_G = \frac{1+0+0}{3},$$

d'où $G\left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$. □