LEÇON N° 9

Trigonométrie. Applications.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

De la 3ème à la Terminale S

Prérequis

Géométrie du triangle, théorème de Pythagore, notion de fonction, produit scalaire

Références

— E. SUQUET, *Trigonométrie*. Troisième. URL : `http://automaths.com/3/cours/3_Trigonometrie_C.pdf`.
— G. COSTANTINI, *Trigonométrie et fonctions circulaires*. Première S. `http://bacamaths.net`.

Table des matières

1 De la trigonométrie vue en classe de troisième

1.1 Définitions

Définition 1.1. Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

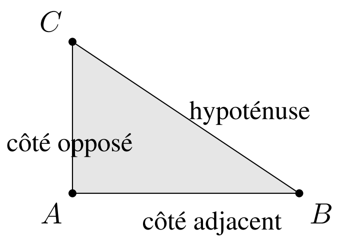


FIGURE 1 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 1.2. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC},\ \sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC},\ \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

PROPRIÉTÉ 1.3. Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

Remarques 1.4 (Sur la calculatrice (Casio FX-92)).
1. Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - sin .
2. Lorsque l'on connaît le cosinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - cos .
3. Lorsque l'on connaît le tangente d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - tan .

Exemples 1.5 (Connaissant sinus, cosinus et tangente)..
1. Si $\sin\widehat{ABC} = 0,8$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 53,13$ degrés à $0,01$ près.
2. Si $\cos\widehat{ABC} = 0,5$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 60$ degrés.
3. Si $\tan\widehat{ABC} = 0,2$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 11,30$ degrés à $0,01$ près.

1.2 Formules de trigonométrie

PROPRIÉTÉ 1.6. Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Démonstration de la propriété 1.6. ◊ On se place dans le cas où x est une valeur strictement compris entre 0 et 90 degrés. Prenons un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = x$. On a alors :

$$\cos x = \frac{AB}{BC}, \ \sin x = \frac{AC}{BC}, \ \tan x = \frac{AC}{AB}.$$

Ainsi,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

On sait que le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2+AC^2 = BC^2$. D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

De plus :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x.$$

□

1.3 Quelques exemples

Exemples 1.7.

1. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $\widehat{DEF} = 30^\circ$ et $DF = 5$. Quelle est la mesure de EF?. Comme DEF est un triangle rectangle en D :

$$\begin{aligned} \sin \widehat{DEF} &= \frac{DE}{DF} \\ \sin 30 &= \frac{DE}{5} \\ DE &= 5 \times \sin 30 \\ DE &= 2,5 \end{aligned}$$

2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 7$. On veut déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,01$ près. Comme ABC est un triangle rectangle en A.

$$\begin{aligned} \tan \widehat{ABC} &= \frac{AC}{AB} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{7}{5} \\ \widehat{ABC} &= 50,19 \text{ degrés à 0,01 près.} \end{aligned}$$

La dernière étape est faite grâce à la calculatrice (en tapant les touches $\boxed{\text{Shift}}$ - $\boxed{\text{tan}}$).

2 De la trigonométrie vue en classe de Première S

2.1 Le radian

Définition 2.1 (Radian). Le *radian* est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Remarque 2.2. Pour trouver la mesure d'un angle de x degrés, on a recours à un tableau de proportionnalité.

degrés	180	x
radians	π	α

Exemple 2.3. Un angle de 60° vaut en radians :

$$\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

2.2 Cercle trigonométrique

Définition 2.4 (Cercle trigonométrique). Si on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 2.5 (Sinus et cosinus). On appelle *cosinus* et *sinus* de α et on note $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OJ}.$$

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$. Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0,1)$, ni en $J'(0,-1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Définition 2.6 (Tangente). On appelle *tangente* de α et on note $\tan\alpha$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

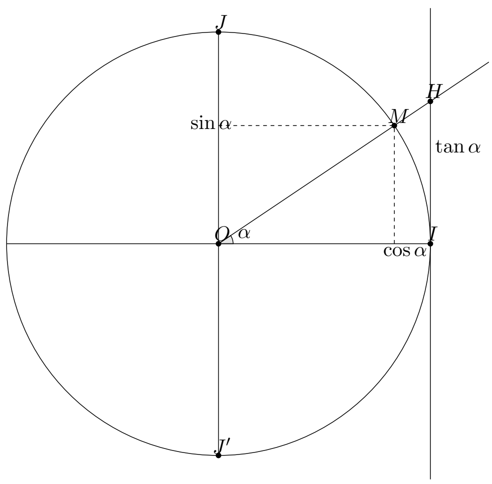


FIGURE 2 – Cercle trigonométrique, cosinus, sinus et tangente d'un angle

La table 1 rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

TABLE 1 – Valeurs remarquables

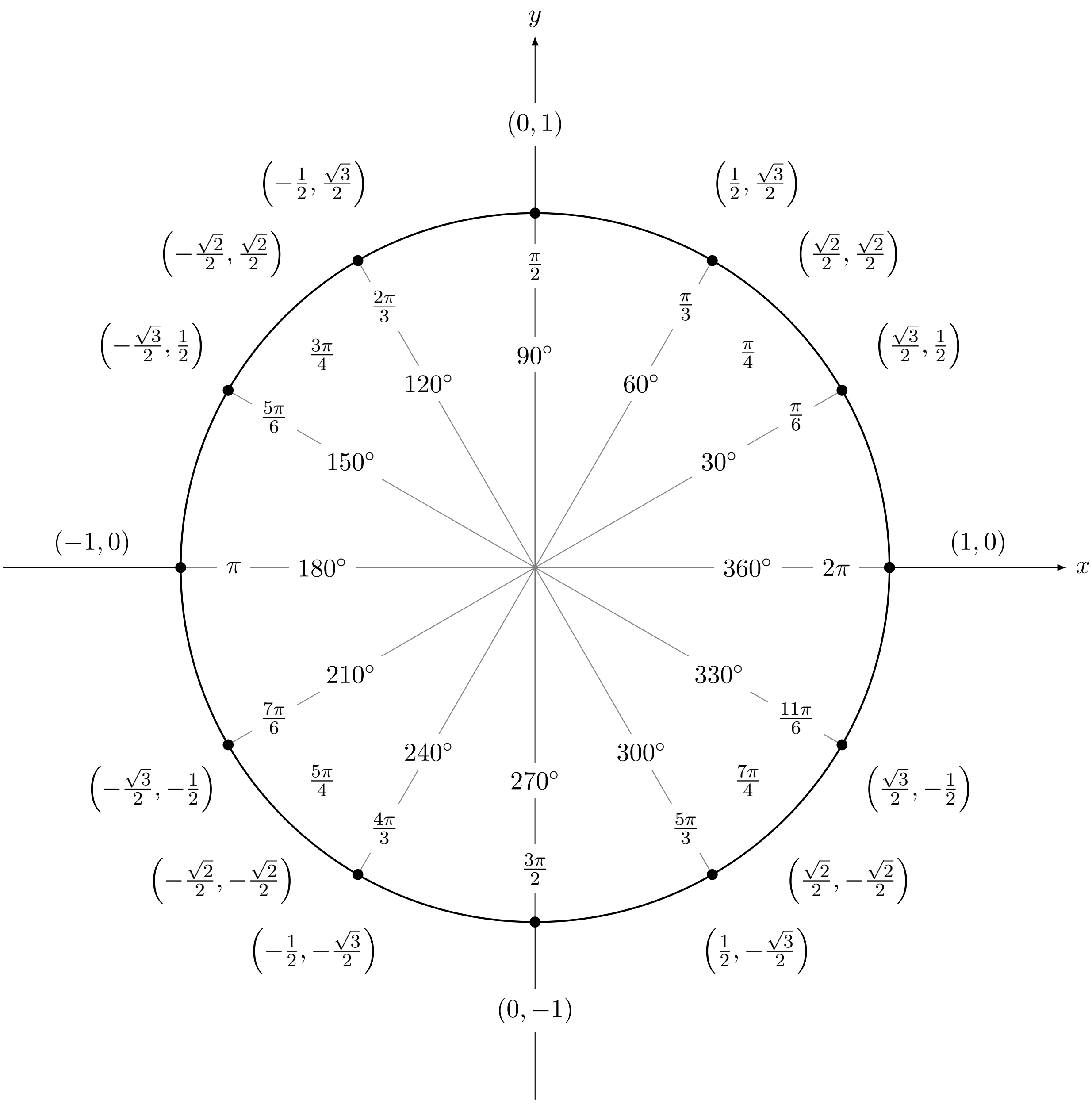
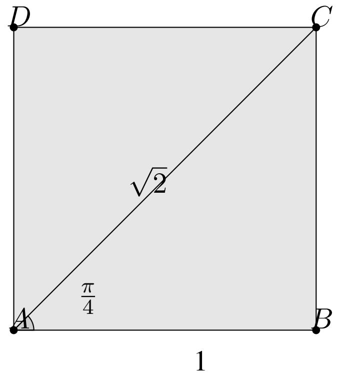


FIGURE 3 – Cercle trigonométrique et quelques valeurs remarquables

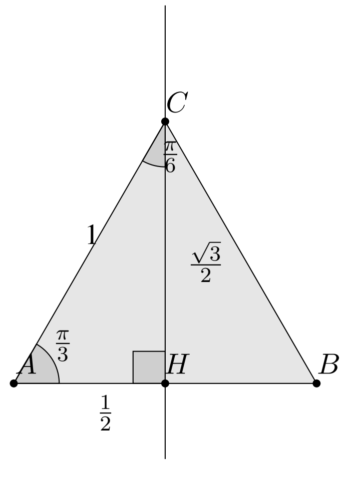
Calcul de valeurs remarquables. ♢ Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1).



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\frac{\pi}{4} &= \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \tan\frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AB} = 1.\end{aligned}$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore, mesure $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2},\ \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

PROPRIÉTÉ 2.7 (SINUS ET COSINUS).

1. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4. $-1 \leq \cos x \leq 1$
5. $-1 \leq \sin x \leq 1$

Exemple 2.8. On admet que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, on veut calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$. On utilise la relation 3 :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1.$$

On calcule $\cos^2 \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

D'où :

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Or $\sqrt{A^2} = |A|$ donc :

$$\left|\sin \frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

Or, $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0\,, \pi]$. Donc :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

2.3 Fonction sinus et cosinus

Définition 2.9 (Fonction périodique). Une fonction f est dite *périodique* de période T si pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$.

Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période car :

$$\cdots = f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = \cdots$$

THÉORÈME 2.10. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).

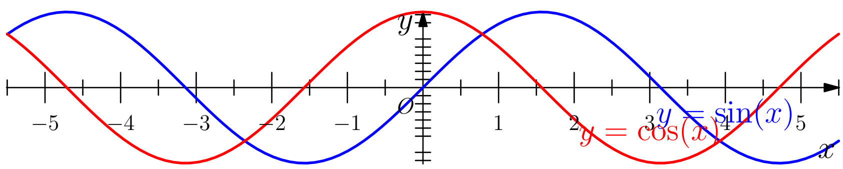


FIGURE 4 – Représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$

2.4 Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

— Si $a \notin [-1\,,1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$)
— Si $a \in [-1\,,1]$, elles ont une infinité

Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

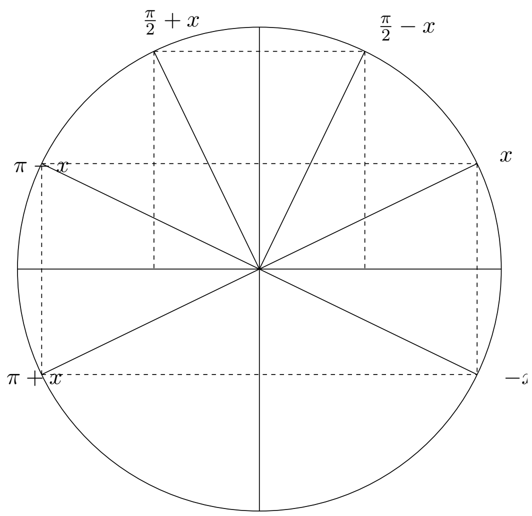
Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.5 Angles associés

PROPRIÉTÉS 2.11. On a les propriétés suivantes :

1. $\cos(-x) = \cos x$,
2. $\sin(-x) = \sin x$,
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
4. $\sin(\pi - x) = \sin x$,
5. $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
6. $\sin(\pi + x) = -\sin x$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$,
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,
9. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,
10. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.



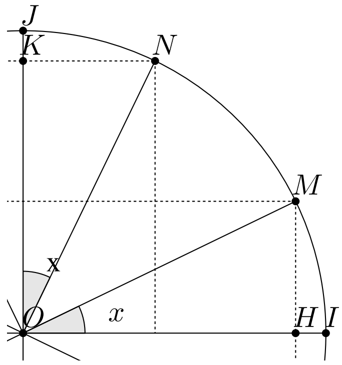
Démonstration des propriétés 2.11. Les relations $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ s'obtiennent immédiatement par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Supposons tout d'abord que x est un angle aigu (c'est-à-dire $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$. On montre les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On note I, J, M et N les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles de 0, $\frac{\pi}{2}$, x et $\frac{\pi}{2} - x$ radians respectivement. Notons H (resp. K) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur l'axe des abscisses (resp. ordonnées). D'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) = x \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$



Les coordonnées du point M sont $M(\cos x, \sin x)$, celles du point N sont : $N(\cos(\frac{\pi}{2}-x), \sin(\frac{\pi}{2}-x))$. Comme x est un angle aigu, toutes ces coordonnées sont positives et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = KN \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = OK.$$

Mais par ailleurs, d'après les relations métriques dans le triangle ONK rectangle en K, on a :

$$\cos x = OK \quad \text{et} \quad \sin x = KN.$$

D'où les relations : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$. Les autres relations se démontrent de manière analogue.

Par exemple, si x appartient à $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, on pose $y = -x$. Comme y est un angle aigu, on a, par exemple, en utilisant ce qui précède :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \sin y \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) = -\sin y,$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin(-x) = \sin x.$$

De même, si x appartient à $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors on pose $y = \pi - x$ et on utilise les formules précédentes. □

2.6 Formules trigonométriques

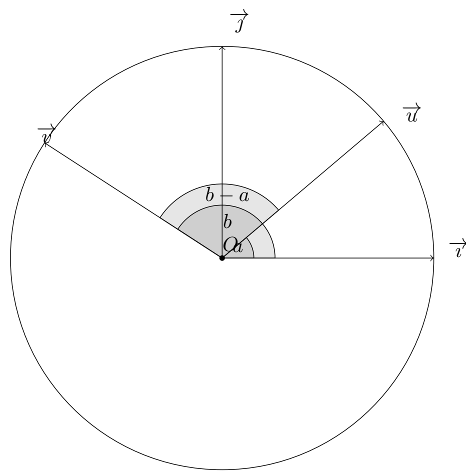
PROPOSITION 2.12 (FORMULES D'ADDITION).

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Justification d'une formule de trigonométrie. ◊

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$



Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

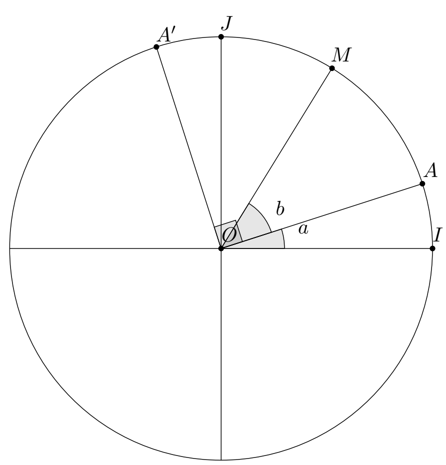
D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$.



D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.13 (FORMULES DE DUPLICATION).
1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

Démonstration de la proposition 2.13. ◊

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.14 (FORMULE DE LINÉARISATION).
1. $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Démonstration de la proposition 2.14. ◊ On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

Exemple 2.15. On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

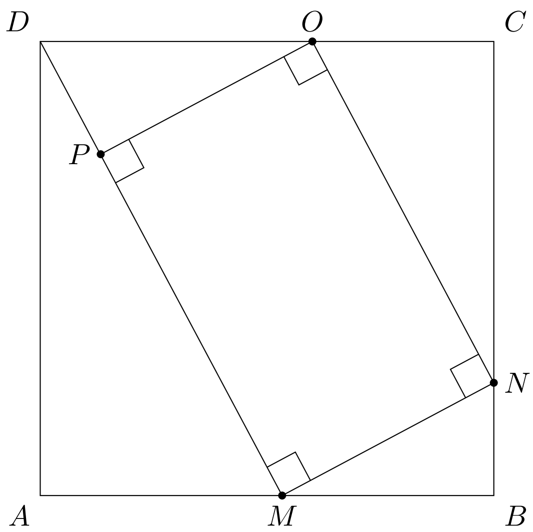
3 Un exercice utilisant la trigonométrie

Exercice 3.1. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On place un point M sur le côté $[AB]$ du carré (distinct de A et B) et on trace le segment $[MD]$.

Existe-il un carré $MNOP$ tel que N, O et P appartiennent respectivement aux segments $[BC]$, $[CD]$ et $[MD]$? Si oui, quelle est l'aire de ce carré ?

Solution de l'exercice. $\diamondsuit$

Figure de l'énoncé



Calcul de la longueur du segment $[MD]$ On note $AM = x$ et on sait que $AD = 1$. On travaille dans le triangle MAD rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MD^2 &= AM^2 + AD^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1 \\ MD &= \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{AMD}$ **et** $\widehat{ADM}$ Toujours dans le triangle MAD rectangle en A, on a :

$$\tan\left(\widehat{ADM}\right) = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{1} = x \Leftrightarrow \widehat{ADM} = \arctan(x)$$
$$\tan\left(\widehat{AMD}\right) = \frac{AD}{AM} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \widehat{AMD} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On préférera utiliser la mesure de l'angle $\widehat{ADM}$ pour la suite de l'exercice.

Calcul de la longueur du segment $[MN]$ Si $AM = x$ alors $MB = 1 - x$. De plus, les angles $\widehat{AMD}$, $\widehat{DMN}$ et $\widehat{NMB}$ sont adjacents, la somme des mesures des trois angles est égale à π (radians). Donc :

$$\widehat{BMN} = \pi - \widehat{DMN} - \widehat{AMD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AMD} = \widehat{ADM}.$$

Donc : $\widehat{BMN} = \arctan(x)$. Ainsi,

$$\cos\left(\widehat{BMN}\right) = \frac{BM}{MN} \Leftrightarrow \cos(\arctan(x)) = \frac{1-x}{MN} \Leftrightarrow MN = \frac{1-x}{\cos(\arctan(x))}.$$

Dans la suite de l'exercice, on notera $\Phi(x) = \cos(\arctan(x))$ et $\Phi^2(x) = (\Phi(x))^2$.

Calcul de la longueur du segment $[BN]$ Dans le triangle BMN rectangle en B, on sait que $BM = 1 - x$ et $MN = \frac{1-x}{\Phi(x)}$. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du segment $[BN]$.

$$\begin{aligned} MN^2 &= BN^2 + BM^2 \\ BN^2 &= MN^2 - BM^2 \\ BN^2 &= \left(\frac{1-x}{\Phi(x)}\right)^2 - (1-x)^2 = \frac{(1-x)^2 - (1-x)^2\Phi^2(x)}{\Phi^2(x)} = \frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)}\left(1-\Phi^2(x)\right) \\ BN &= \sqrt{\frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)}\left(1-\Phi^2(x)\right)} = \frac{(1-x)}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)} \end{aligned}$$

Calcul de la longueur du segment $[CN]$ Si :

$$BN = \frac{(1-x)}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)}$$

alors :

$$CN = 1 - BN = 1 - \frac{1-x}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)} \qquad = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

Calcul de la longueur du segment $[ON]$ Par le même argument sur l'adjacence des angles, on peut dire que $\widehat{BMN} = \widehat{ONC}$. On veut calculer la longueur du segment $[ON]$, on se place dans le triangle NCO rectangle en C. On sait que :

$$\widehat{ONC} = \arctan(x) \quad \text{et} \quad CN = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

D'où :

$$\cos(\widehat{ONC}) = \frac{CN}{ON} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{ON}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} ON &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{\Phi(x)} \\ &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \end{aligned}$$

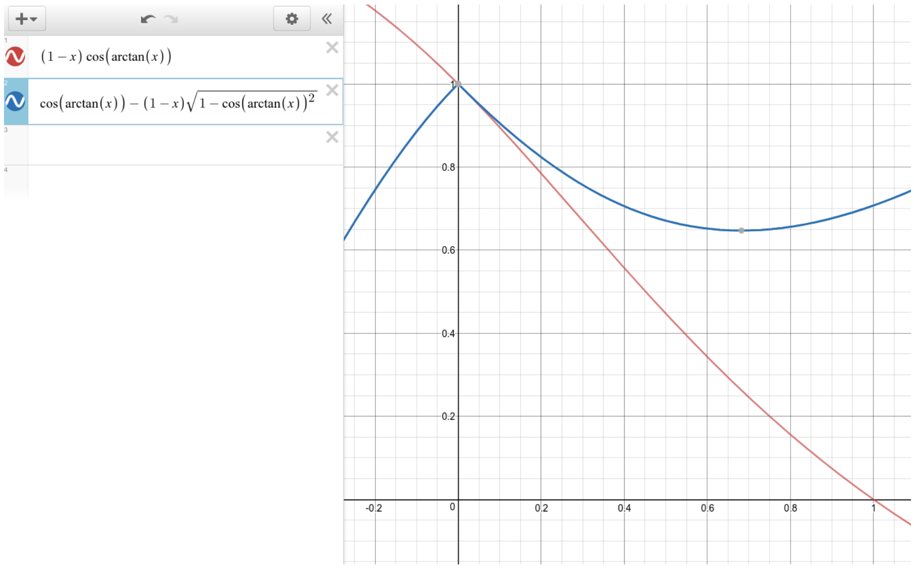
Résolution de l'équation $MN = ON$ Pour répondre au problème posé, il faut résoudre l'équation $MN = ON$ (c'est-à-dire $MNOP$ est un carré). Ainsi :

$$\begin{aligned} MN = ON &\Leftrightarrow \frac{1-x}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \\ &\Leftrightarrow (1-x)\Phi^2(x) = \Phi(x)\left[\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}\right] \end{aligned}$$

On peut simplifier par $\Phi(x) = \cos\arctan(x)$ des deux côtés de l'égalité car $\cos\arctan(x) \neq 0$ pour $x \in [0; 1]$. Ainsi :

$$MN = ON \Leftrightarrow (1-x)\cos\arctan(x) = \cos\arctan(x) - (1-x)\sqrt{1-\cos\arctan(x)^2}.$$

On ne peut pas résoudre cette équation algébriquement. On a recours à la méthode graphique :



Conclusion Sur l'intervalle $[0; 1]$, il n'y a qu'une seule intersection entre les deux courbes en $x = 0$. Or, ce cas ($x = 0$) correspond au cas où $M = A$. Comme il est exclu, il n'existe pas de carré $MNOP$ qui répond à notre problème.

$\square$