LEÇON N° 8

Forme trigonométrique d'un nombre complexe. Applications.

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S

Prérequis

Construction de $\mathbb{C}$ (rappel en première partie), partie réelle / partie imaginaire, conjugué d'un nombre complexe, affixe d'un point et d'un vecteur, congruences, fonctions trigonométriques, angles et cocyclicité, équations différentielles

Références

— G. COSTANTINI, *Nombres complexes*. Terminale S. URL : `http://bacamaths.net`
— C. BOULONNE, *Notes de cours, M101 : Fondements de l'algèbre.* L1 Mathématiques, 2006-2007.

Table des matières

1 Petit rappel sur les nombres complexes

$\Diamond$

Considérons l'équation $x^2 = 1$. Cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 1 et -1. Mais si on remplace dans l'équation 1 par -1 ? On est un peu embêté car aucun nombre réel admet un carré négatif. Alors, décidons que i serait une des solutions de cette équation, c'est-à-dire que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'équation aurait donc deux solutions (i et $-\mathrm{i}$) dans un autre ensemble de nombres car $x^2 + 1 = 0$ équivaudrait à $x^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ ou soit $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = 0$.

Définition 1.1. On définit l'ensemble des complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Remarque 1.2. On peut aussi identifier $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que à un point $M(a, b)$, on peut lui faire correspondre un $z = a + \mathrm{i}b$ et vice et versa. On dira que $z = a + \mathrm{i}b$ est l'affixe du point $M(a, b)$.

Définition 1.3 (Partie réelle et partie imaginaire). Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Le réel a s'appelle la *partie réelle* de z et b la *partie imaginaire*. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Définition 1.4 (Imaginaire pur). On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle (c'est-à-dire il s'écrit $z = b\mathrm{i}$ où $b \in \mathbb{R}$).

Définition 1.5 (Conjugué d'un nombre complexe). Soient a et b deux nombres réels. Le nombre complexe *conjugué* de $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Exemple 1.6. Soit $z = 9 - 4\mathrm{i}$. Son conjugué est $\overline{z} = 9 + 4\mathrm{i}$.

PROPRIÉTÉS 1.7. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$;
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$;
4. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$;
5. z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration.
1. Évident.
2. Soit $z = a + b\mathrm{i}$, on a :

$$z + \overline{z} = a + b\mathrm{i} + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

3. Soit $z = a + b\mathrm{i}$, on a :

$$z - \overline{z} = a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$

4. z est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
5. z est un imaginaire pur si et seulement $\mathrm{Re}(z) = 0$.

$\square$

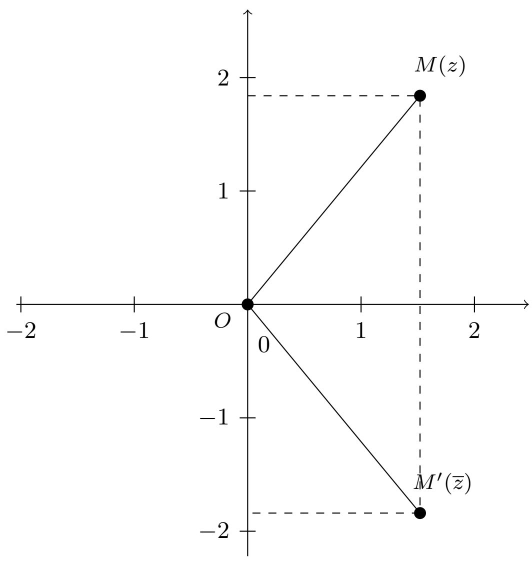


FIGURE 1 – Interprétation géométrique du conjugué

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.1 (Module d'un nombre complexe). On appelle *module* d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ la quantité positive $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarques 2.2. On donne une interprétation géométrique du module. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé.

1. Si z est l'affixe du point $M(a, b)$, le module z n'est autre que la distance OM, $OM = |z|$.
2. Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, le module de z représente la distance AB :

$$AB = |z_B - z_A|$$

où z_A (resp. z_B) représente l'affixe du point A (resp. B).

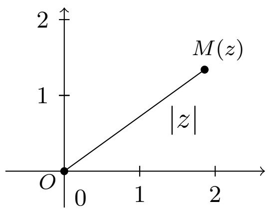


FIGURE 2 – Interprétation graphique du module

Exemples 2.3.
1. Soit $z = -3 + 4\mathrm{i}$, on a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$, donc $|z| = 5$.
2. On se donne $z_A = -1 + 3\mathrm{i}$ l'affixe d'un point A et $z_B = 2 - \mathrm{i}$ l'affixe du point B. On veut calculer la distance AB. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3 - 4\mathrm{i}$ donc :

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Remarques 2.4.
1. $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. D'après les formules de conjugaison, $|z|^2 = z\overline{z}$.
4. Si $z = a + b\mathrm{i}$ est réel alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

THÉORÈME 2.5 (PROPRIÉTÉS DES MODULES). Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$. En particulier, si λ est réel, $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$.
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (lorsque $z' \neq 0$). En particulier, pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
3. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration. $\diamondsuit$

1. On a :
$$\left|zz'\right|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2\left|z'\right|^2 = (|z|\left|z'\right|)^2.$$
2. On peut procéder de la même manière que dans a.
3. $$\begin{aligned}|x+y|^2 - (|x|+|y|)^2 &= (x+y)^2 - (|x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 + 2\,|xy| + y^2) = 2(xy - |xy|) \leq 0\end{aligned}$$
Donc $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$.

$\square$

Définition 2.6 (Argument). Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. On appelle *argument* d'un nombre complexe z non nul, toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\theta = \arg(z)$.

Remarque 2.7. Un nombre complexe possède une *infinité* d'arguments ! Si θ est un argument de z, tout autre argument de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,,\pi[$ s'appelle l'*argument principal*.

On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ ne se définit pas.

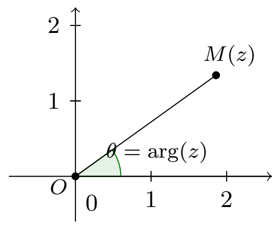


FIGURE 3 – Interprétation graphique de l'argument

Exemples 2.8.

1. $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
2. $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$.
3. $\arg(-1) = \pi \pmod{2\pi}$.
4. $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
5. $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

PROPOSITION 2.9.

1. Un réel strictement positif a un argument modulo 2π, un réel strictement négatif a un argument égal à π modulo 2π. Donc, on peut dire :
$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0 \pmod{\pi}).$$

2. Un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ $\pmod{2\pi}$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négatif a un argument égal à $-\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Donc, on peut dire :

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right),$$

où $\mathrm{i}\mathbb{R}$ représente l'ensemble des imaginaires purs.

On donne une méthode pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe *non nul*. On utilise les relations métriques dans le triangle OHM de la figure 4.

Cas où $\theta \in [0\,,\pi/2]$

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|}.$$

Cas où $\theta \in]\pi/2\,,\pi]$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{(-a)}{|z|} = \frac{a}{|z|}.$$

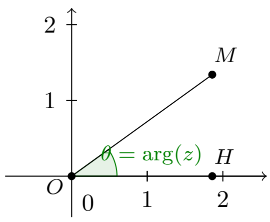
Cas où $\theta < 0$ On raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.

Dans tous les cas, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

Si les cosinus et sinus ci-dessus ont des valeurs remarquables, on peut trouver θ directement à l'aide du cercle trigonométrique, sinon, à l'aide de la calculatrice en respectant la règle suivante :

— $\arccos\left(\frac{a}{|z|}\right)$ donne la valeur absolue de θ ;
— $\sin(\theta)$ donne le signe de θ.



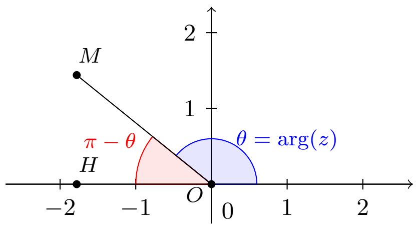


FIGURE 4 – Différents cas pour l'angle

Exemples 2.10. 1. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$. On a :

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16.$$

On doit alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ce sont des valeurs remarquables, on peut donc trouver θ à l'aide du cercle trigonométrique : $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

2. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = 3 - 4\mathrm{i}$. On a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|z| = 5$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \simeq 0,9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif donc θ est négatif : $\theta \simeq -0,9273$ rad, c'est-à-dire $\theta \simeq 53,13°$.

THÉORÈME 2.11 (PROPRIÉTÉS DES ARGUMENTS). Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.
3. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \pmod{2\pi}$.

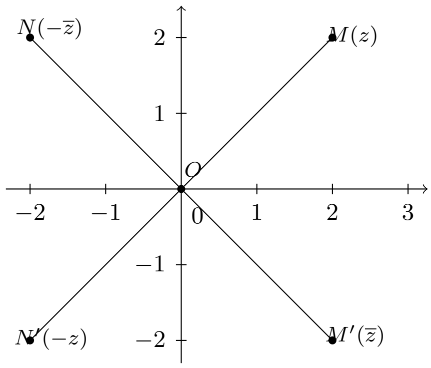


FIGURE 5 – Illustration de la démonstration pour le théorème

Remarque 2.12. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ alors :

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}.$$

Définition 2.13 (Forme trigonométrique). $z = a + \mathrm{i}b$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$; cette écriture s'appelle une *forme trigonométrique* de z.

Remarques 2.14.

1. Le nombre complexe nul $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).
2. Pour trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe *non nul*, il suffit de calculer son module et son argument.

THÉORÈME 2.15. Si $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. ◊ On a :

$$\left|z^2\right| = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

Or $r > 0$ donc $|z| = r$. Soit θ' un argument de z alors :

$$z = r(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) = r\cos(\theta') + \mathrm{i}r\sin(\theta').$$

Or, par hypothèse :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)$$

et comme $a' + b'\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}$ équivaut à $a' = a$ et $b' = b$ alors :

$$r\cos(\theta') = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad r(\sin(\theta') = r\sin(\theta).$$

D'où :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta') = \sin(\theta).$$

Ce qui implique $\theta' = \theta \pmod{2\pi}$ donc $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$. □

Exemple 2.16. Soit

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

z n'est pas sous une forme trigonométrique car un module ne peut pas être négatif. On transforme :

$$z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{5} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right)\right).$$

Le module de z est donc $r = 2$ et un de ses arguments est $\theta = \frac{6\pi}{5}$.

THÉORÈME 2.17 (PROPRIÉTÉS SUR LES ARGUMENTS (ENCORE !)). Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls, on a :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
2. $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
3. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$
4. $\arg(z^n) = n\arg(z)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. ♢

1. On va utiliser les formes trigonométriques de z et z' :

   $$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')).$$

   Ainsi :

   $$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) \\ &= rr'[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))]. \end{aligned}$$

   Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition, donne :

   $$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')).$$

   Comme $rr' > 0$, on en déduit, d'après le théorème précédent, que :

   $$|zz'| = rr' \quad \text{et} \quad \arg(zz') + \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

   D'où la première relation.
2. Si $z' = \frac{1}{z}$ dans la relation précédente, cela donne :

   $$\arg(1) = \arg(\tfrac{1}{z}) + \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

   Or $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$ d'où la seconde relation :

   $$\arg(\tfrac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

3. En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on a d'après ce qui précède :

   $$\arg(\tfrac{z}{z'}) = \arg(z) + \arg(\tfrac{1}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

   D'où la troisième relation.

4. Pour la dernière relation, on distingue trois cas :
   Cas $n > 0$ Par récurrence, on peut montrer que :
   $$\arg(z^n) = \arg(z \times z \times \cdots \times z) = n \arg(z) \pmod{2\pi}.$$
   Cas $n < 0$ On pose $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent $m > 0$:
   $$\arg(z^m) = \arg(\tfrac{1}{z^m}) = m \arg(\tfrac{1}{z}) = -m \arg(z) = n \arg(z) \pmod{2\pi}.$$
   Cas $n = 0$ La relation $\arg(z^n) = \arg(1) = 0 = n \arg(z) \pmod{2\pi}$ est triviale.

□

Exemple 2.18. Soit $z = 3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})$ et $z' = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}))$. On veut calculer zz'. L'utilisation des propriétés des modules et des arguments nous livrent directement le résultat :
$$zz' = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

3 Autres formes d'écritures pour un nombre complexe

3.1 Forme algébrique

Définition 3.1 (Forme algébrique). L'écriture $z = a + b\mathrm{i}$ s'appelle la *forme algébrique* de z (ou *forme cartésienne*).

On donne une propriété pour passer d'une forme trigonométrique à une forme algébrique.

PROPRIÉTÉ 3.2. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors la forme algébrique de z s'obtient en appliquant les formules suivantes :
$$a = r\cos\theta \quad \text{et} \quad b = r\sin\theta.$$

Exemple 3.3. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :
$$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Démonstration. ◊ On a : $\cos((3\pi)\,4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où :
$$a = 2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$
Ainsi : $z = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$. □

3.2 Forme exponentielle

◊
Soit f l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \end{array}.$$
On a, pour tous θ, θ' de $\mathbb{R}$:
$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta').$$
La fonction f est donc une solution (complexe) de l'équation fonctionnelle $f(u + v) = f(u)f(v)$. Or, on sait (prérequis) que les solutions de cette équation fonctionnelle sont solutions des équations

différentielles de type $y' = ay$. On va déterminer a (qui est ici dans $\mathbb{C}$ puisque f est à valeur dans $\mathbb{C}$). En étendant les propriétés de la dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) = \mathrm{i}f(\theta).$$

D'où $a = \mathrm{i}$ et :

$$f(\theta) = f(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

$\Diamond$

On peut énoncer la définition suivante :

Définition 3.4. Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ a pour module 1 et argument θ.

Exemples 3.5.
1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$,
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$,
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$,
4. $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

Définition 3.6 (Forme exponentielle). Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Cette écriture est appelée une *forme exponentielle* de z.

Remarque 3.7. Le conjugué de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

THÉORÈME 3.8. Pour tous θ et θ' de $\mathbb{R}$,
1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
2. $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.
3. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

La démonstration du théorème repose sur les propriétés des arguments.

Exemples 3.9.
1. La notation exponentielle rend les calculs très simples . Si $z = 3\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ et $z' = 7\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$ alors :
$$zz' = 21\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{3}{7}\mathrm{e}^{17\mathrm{i}\pi/12}.$$
2. On veut calculer $(1+\mathrm{i})^{14}$. On pose $z = 1 + \mathrm{i}$. On a donc, sous la forme exponentielle :
$$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$
D'où :
$$z^{14} = 2^7\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/2} = 128\mathrm{e}^{12\pi}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -128\mathrm{i}.$$

4 Applications

THÉORÈME 4.1.
1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.

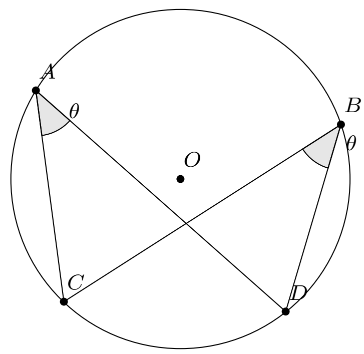
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ orthogonaux} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 4.2. Quatre points A, B, C et D distincts du plan sont cocycliques ou alignés si et seulement si :

$$\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. ◊



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d}\right) = 0 \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 4.3. Un triangle est équilatéral si et seulement si les affixes a, b et c de ses sommets vérifient :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Démonstration. ◊ On va d'abord montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2$ avec les propriétés de j suivantes :

$$\mathrm{j}^3 = 1 \tag{1}$$

$$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0 \tag{2}$$

Or ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie C sur A. On en déduit donc que $\frac{a-b}{c-b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = -\mathrm{j}^2$. Or, en utilisant la relation (2), on obtient :

$$1 + \mathrm{j} = -\mathrm{j}^2$$

d'où :

$$\frac{a-b}{c-b} = 1 + \mathrm{j} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} - \frac{c-b}{c-b} = \mathrm{j} \Leftrightarrow \frac{a-b-c+b}{c-b} = \mathrm{j} \Leftrightarrow \frac{a-c}{c-b} = \mathrm{j}.$$

On multiplie alors les deux membres par $c - b$:

$$a - c = \mathrm{j}(c-b) \Leftrightarrow a - c - \mathrm{j}(c-b) = 0 \Leftrightarrow a - c - c\mathrm{j} + b\mathrm{j} = 0 \Leftrightarrow a - (1+\mathrm{j})c + b\mathrm{j} = 0.$$

On utilise encore la formule (2) :

$$a + \mathrm{j}^2 c + b\mathrm{j} = 0.$$

Ainsi : ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$. On peut montrer de même que ABC est un triangle équilatéral indirect si et seulement si $a + c\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2 = 0$. On a alors ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2)(a + c\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2) = 0$ ou encore (en utilisant encore les formules (1) et (2)) :

$$\begin{aligned}
(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2)(a + c\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2) = 0 &\Leftrightarrow a^2 + ac\mathrm{j} + ab\mathrm{j}^2 + ba\mathrm{j} + bc\mathrm{j} + b^2\mathrm{j}^3 + ca\mathrm{j}^2 + c^2\mathrm{j}^3 + bc\mathrm{j}^4 = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + ab(\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) + ac(\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) + b^2 + bc(\mathrm{j}^2 + \mathrm{j}^4) + c^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) - ab - ac - bc = 0 \\
&\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) = ab + ac + bc
\end{aligned}$$

$\square$