LEÇON N° 3

Variables aléatoires à densité

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et BTS

Prérequis

Probabilités, intégrales, primitives, croissance comparée, équations différentielles, désintégration radioactive

Références

- G. COSTANTINI, *Lois de probabilités continues*. URL : `http://bacamaths.net`.
- C. SUQUET, *Intégration et Probabilités Élémentaires*. URL : `http://math.univ-lille1.fr/~ipeis/`. 2009-2010.

Table des matières

1 Introduction

Nous avons vu dans la leçon « Variables aléatoires discrètes » que des variables aléatoires peuvent prendre leur valeur dans un sous-ensemble des nombres entiers. On va essayer de généraliser en élargissant l'ensemble des valeurs de départ d'une variable aléatoire à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1. On tire au hasard un point a sur le segment $[0\,,1]$ et on note $X = a$. On a alors $X(\Omega) = [0\,,1]$.

1. Calculer $P(\{X = 0{,}5\})$.
2. Calculer la probabilité que X appartienne au segment $[0\,,\frac{1}{2}]$.

2 Densité et loi de probabilité

Définition 2.1 (Densité de probabilité). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *densité de probabilité sur I*, toute fonction f *continue et positive sur I* telle que :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 2.2. La notation $\int_I$ désigne l'intégrale sur l'intervalle I.

1. Si $I = [a\,,b]$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si I est non borné d'un coté (par exemple $I = [a\,,+\infty[$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Si $I = \mathbb{R}$ alors :
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(x)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.3. Soit f une fonction constante sur l'intervalle $[0\,,1]$. On cherche la valeur de cette constante pour que f soit une densité. On note γ cette constante :

$$\int_0^1 \gamma\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,,b]$, on montre que $f(t) = \gamma = \frac{1}{b-a}$.

Définition 2.4 (Loi de probabilité). Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I associe la quantité :

$$P([a\,,b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelé loi de probabilité sur I.

$\Diamond$ *Justification de la définition 2.4.* Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-intervalles disjoints de I, alors par linéarité de l'intégrale :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(I_n)$$

et de plus $P(I) = 1$. $\square$

Remarques 2.5.

1. On a bien $0 \leq P([a\,,b]) \leq 1$ car $[a\,,b]$ est inclus dans I.
2. On a :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « *presque-sûrement impossible* ».

Exemples 2.6.

1. Si f est constante sur $[a\,,b]$, on dit que P est la *loi uniforme.*
2. Si f est de la forme $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la *loi exponentielle de paramètre* λ. On a tout de même besoin d'une justification. Soit $\lambda > 0$ un réel. On montre que $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}t}{\lambda}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1.$$

La limite en $+\infty$ de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe bien et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

3 Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Définition 3.1. Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 3.2.

1. On peut maintenant répondre aux questions de l'exemple introductif. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,,1]$. Donc :

(a)

$$P(X = 0{,}5) = \int_{0{,}5}^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b)

$$P(X \in [0\,,0{,}5]) = P(0 \leq X \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0{,}5.$$

Dans le cas général, supposons que X suivent la loi uniforme sur $[a\,,b]$. Alors :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

On note $L([a\,,b])$ la longueur de l'intervalle de $[a\,,b]$. Si X suit une loi uniforme sur un intervalle I, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donné par la formule :

$$P(X \in J) = \frac{L(J)}{L(I)}.$$

2. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et par complémentarité :

$$P(X \geq x) = 1 - P(0 \leq X \leq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Définition 3.3 (Fonction de répartition). Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a\,,b]$ (ou de la forme $[a\,,+\infty[$) qui suit une loi de probabilité P. On appelle *fonction de répartition de* X, la fonction F définie pour tout réel x de I par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

PROPRIÉTÉ 3.4. Si F est une fonction de répartition de X alors :

1. F est croissante sur $[a\,,x]$,
2. $F(a) = 0$,
3. $F(b) = 1$ (si $I = [a\,,b]$) ou

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \qquad \text{si } I = [a\,,+\infty[.$$

4. $P(X > x) = 1 - F(x)$
5. $P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Exemple 3.5. Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

4 Espérance d'une variable aléatoire continue

Définition 4.1 (Espérance d'une variable aléatoire continue). Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I. On appelle *espérance* de X la quantité :

$$\mathbf{E}(X) = \int_I tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples 4.2.

1. Si X suit une loi uniforme sur $I = [a\,,b]$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}.$$

2. Soit X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On calcule l'intégrale suivante :

$$\int_0^x t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose :

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

ainsi

$$u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Puis, on étudie la limite lorsque x tend vers $+\infty$. On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

grâce à la règle des croissances comparées et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

donc $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

5 Exemples de variables aléatoires à densité

5.1 Lois normales

5.1.1 Définition

Définition 5.1 (Loi normale). Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ si elle a pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}.$$

Conséquence 5.2.

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x.$$

5.1.2 Cas particulier de $\mathfrak{N}(0, 1)$

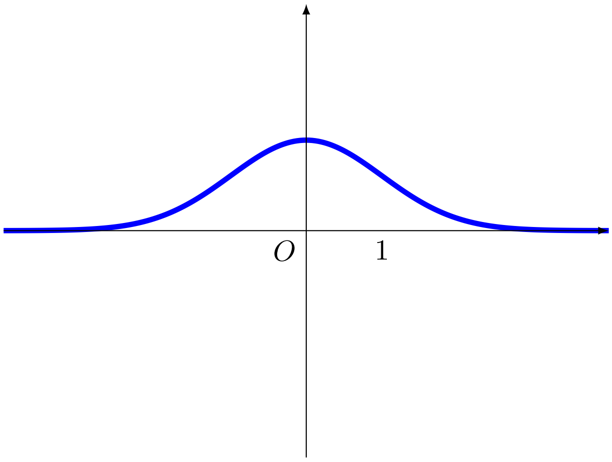
La densité de probabilité est alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ et on appelle, dans ce cas, Π la fonction de répartition.

On a donc :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}2\,\mathrm{d}x = \Pi(b) - \Pi(a).$$

Les valeurs de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite étant tabulées, il est désormais possible de calculer $P(a \leq X \leq b)$.

PROPRIÉTÉ 5.3. La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.



Conséquence 5.4. Si $x > 0$ alors $\Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$.

Démonstration. $\Diamond$ En effet :

$$\Pi(-x) = P(X \leq -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\inf}^{-x} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

car f une fonction paire

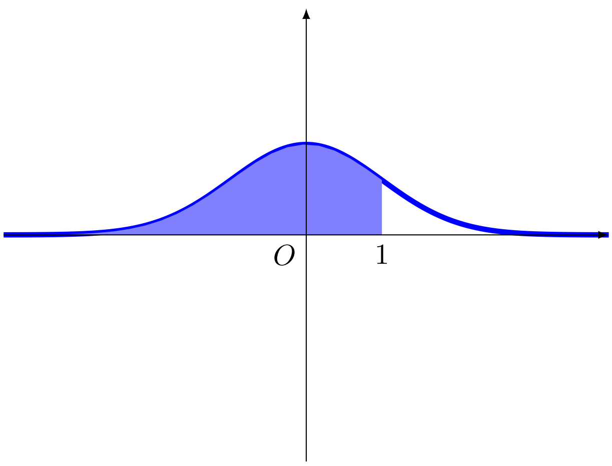
$$= \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

après le changement de variable $u = -t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \Pi(x).$$

$\square$

Exemples 5.5.
1. $\Pi(1) = P(X \leq 1)$ correspond donc à l'aire sous la courbe délimité à *droite* par la droite d'équation $x = 1$.
2. $\Pi(-1) = P(X \leq -1) = 1 - \Pi(-1)$ correspond à l'aire sous la courbe délimité *à gauche* par la droite d'équation $x = 1$.



5.1.3 Se ramener à une $\mathfrak{N}(0,1)$

PROPRIÉTÉ 5.6. Soit $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$. Alors $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On dit qu'on centre et qu'on réduit la variable aléatoire X.

Démonstration. $\diamondsuit$

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P\left(a \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq b\right) \\ &= P(A\sigma + m \leq X \leq b\sigma + m) = \int_{a\sigma+m}^{b\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$ et on obtient :

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\sigma\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

donc Y a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}2$. La variable aléatoire Y suit bien une loi normale centrée réduite. $\square$

Exemple 5.7. La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m = 2,09$ et $\sigma = 0,13$, autrement dit $X \sim \mathfrak{N}(2.09, 0.13)$.

On va se ramener à une loi normale centrée réduit en posant : $T = \frac{X-m}{\sigma}$ et donc $T \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On demande de calculer $P(X \leq 2,35)$ et $P(1,895 \leq X \leq 2,285)$.

—

$$P(X \leq 2,35) = P\left(\frac{X-2,09}{0,13} \leq 2\right) = P(T \leq 2) = 0,9772.$$

—

$$\begin{aligned} P(1,895 \leq X \leq 2,285) &= P(-1,5 \leq T \leq 1,5) = P(T \leq 1,5) - P(T \leq -1,5) \\ &= P(T \leq 1,5) - (1 - P(T \leq 1,5)) = 2 \times P(T \leq 1,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$

5.1.4 Espérance et variance

PROPRIÉTÉ 5.8. Si $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$ alors $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Démonstration. $\diamondsuit$

—

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x.$$

On considère la variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ alors $Y \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On a : $X = \sigma Y + m$ donc :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X) = \sigma\mathbf{E}(Y) + m \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,\mathrm{Var}(Y) \end{cases}$$

donc si $\begin{cases} \mathbf{E}(Y) = 0 \\ \mathrm{Var}(Y) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \mathbf{E}(X) = m \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \end{cases}$.

—

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{car } f \text{ est une fonction paire.}$$

—
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \mathbf{E}(Y^2).$$

Il faut donc calculer :
$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2} 2 \, \mathrm{d}y.$$

Pour cela, on va faire une IPP en considérant l'intégrale suivante :
$$\text{soit } a > 0, \quad I(a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \, \mathrm{d}y$$

avec :
$$\begin{cases} u(y) = \mathrm{e}^{-y^2} 2, \; u'(x) = -y\mathrm{e}^{-y^2/2} \\ v'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; v(y) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \left[\frac{y}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \right]_{-a}^{a} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} y^2 \mathrm{e}^{-y^2} 2 \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-a^2/2} + \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puis on fait tendre a vers $+\infty$ et on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \, \mathrm{d}y = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \, \mathrm{d}y.$$

Au final, on a :
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) = 1.$$

□

5.1.5 Compléments : table de la loi normale

Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathfrak{N}(0, 1)$.

La table 1 nous donne les valeurs $P(X \leq t)$ où $t = \overline{a, bc}$. La première colonne correspond à a, b et la première ligne correspond à c.

5.2 Loi uniforme

La loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathrm{Unif}([a, b])$ a pour densité de probabilité :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a\,, b] \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a\,, b]. \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ 5.9. Si $X \sim \mathrm{Unif}([a, b])$ alors :
$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5.3 Loi exponentielle

La loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ a pour densité de probabilité :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

FIGURE 1 – Table des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0, 1)$

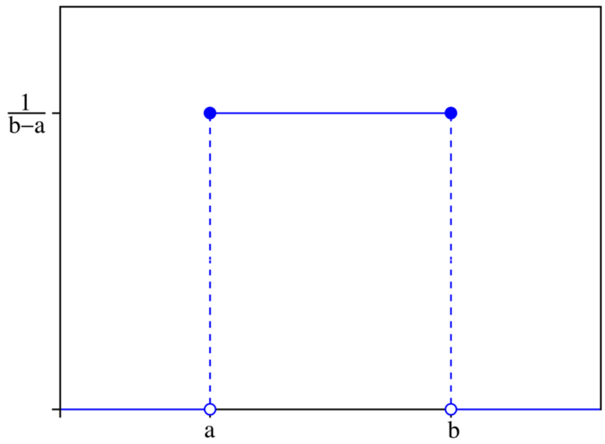


FIGURE 2 – Densité de la loi uniforme $[a, b]$

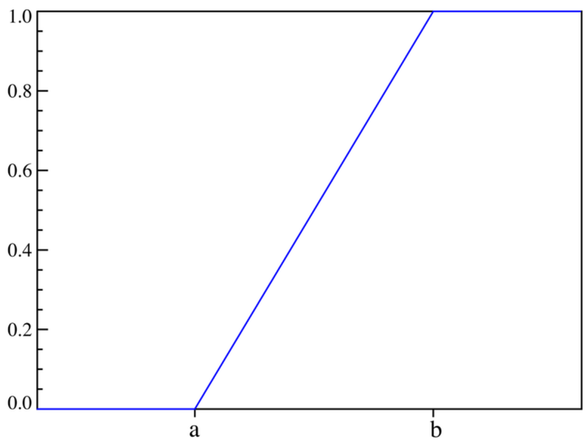


FIGURE 3 – Fonction de répartition de la loi uniforme $[a, b]$

PROPRIÉTÉ 5.10. La densité de probabilité h de la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont les densités f et g sont nulles pour $x \leq 0$, est définie par :

$$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

PROPRIÉTÉ 5.11. Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

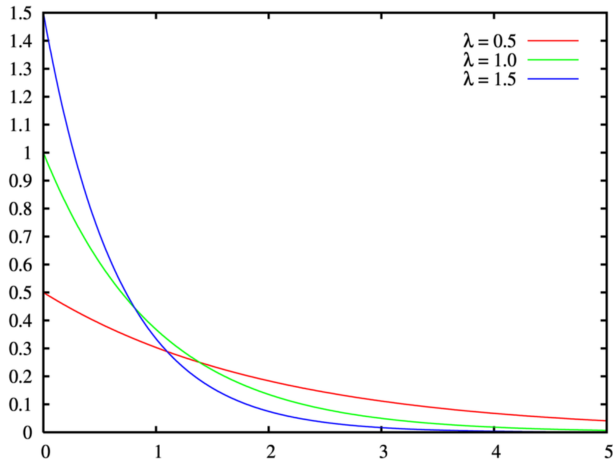


FIGURE 4 – Densité de la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

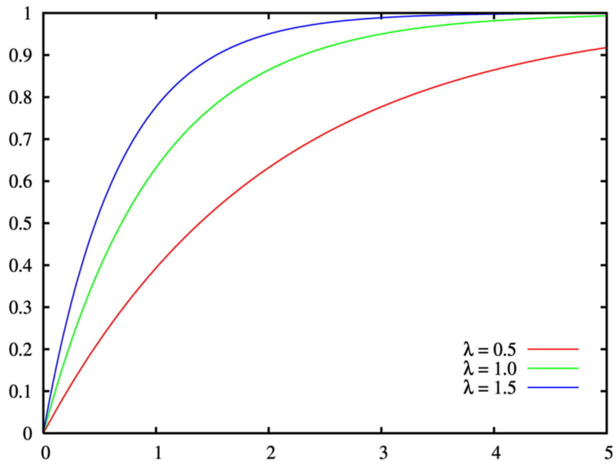


FIGURE 5 – Fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

6 Applications

6.1 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition 6.1. Soit T une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que T suit la *loi de durée de vie sans vieillissement* lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge :

$$P_{(T\geq t)}(T\geq t+h)=P(T\geq h).$$

PROPOSITION 6.2. Une variable aléatoire T suit la loi de durée sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

$\Diamond$ *Démonstration de la proposition 6.2.* ($\Leftarrow$) On suppose que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T\geq t)}(T\geq t+h)=\frac{P((T\geq t+h)\cap(T\geq t))}{P(T\geq t)}.$$

Or l'événement « $T\geq t+h$ » est inclus dans l'événement « $T\geq t$ » donc :

$$P((T\geq t+h)\cap(T\geq t))=P(T\geq t+h)=\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}.$$

Par ailleurs :

$$P(T\geq t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

d'où :

$$P_{(T\geq t)}(T\geq t+h)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda h}=P(T\geq h).$$

($\Rightarrow$) Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T\geq t)}(T\geq t+h)=P(T\geq h)\Leftrightarrow P(T\geq t+h)=P(T\geq h)P(T\geq t).$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t)=1-F(t)=1-P(T\leq t)=P(T>t)=P(T\geq t).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0)=1-F(0)=1\quad\text{et}\quad\varphi(t+h)=\varphi(t)\varphi(t),$$

autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits. Il existe donc un réel a (voir la leçon « Équations différentielles ») tel que

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{at}.$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t)\leq 1\Leftrightarrow\mathrm{e}^{at}\leq 1\Leftrightarrow at\leq 0\Leftrightarrow a\leq 0.$$

On pose $\lambda=-a\in\mathbb{R}_+$. Si a était nul, on aurait, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t)=1\Leftrightarrow P(T\geq t)=1$$

Ce qui signifierait que notre individu est éternel, hypothèse que l'on peut rejeter. Donc, on a bien $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\Leftrightarrow 1-F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en dérivant, on obtient :

$$-f(t)=-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\Leftrightarrow f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

$\square$

$\Diamond$ *Une autre preuve pour loi de durée de vie sans vieillissement implique loi exponentielle.* Soit X une variable aléatoire dont la loi vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) \tag{1}$$

et G sa fonction de survie [1] Comme $G = 1 - F$, G est décroissante et continue à droite et tend vers 0 en $+\infty$. De plus, l'écriture de (1) suppose implicitement que $G(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ car sinon $P(\cdot \mid X > t)$ ne serait pas définie. On a aussi :

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{G(t+s)}{G(t)}. \tag{2}$$

Grâce à (2), on voit que la propriété d'absence de mémoire (1) équivaut à :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{G(t+s)}{G(t)} = G(s).$$

La fonction de survie G doit donc être une solution décroissante, continue à droite, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que $0 < G(t) \leq 1$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad G(t+s) = G(t)G(s). \tag{3}$$

En faisant $s = t = t0$ dans (3), on obtient $G(0) = G(0)^2$ et comme $G(0) > 0$, on a

$$G(0) = 1. \tag{4}$$

En faisant $s = t$ dans (3), on obtient $G(2t) = G(t)^2$, puis de proche en proche

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 0, \quad G(nt) = G(t)^n. \tag{5}$$

En particulier pour $t = 1/d$, $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{n}{d}\right) = G\left(\tfrac{1}{d}\right)^n. \tag{6}$$

Lorsque $n = d$, (6) donne $G(1) = G(1/d)^d$ d'où :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{1}{d}\right) = G(1)^{1/d}. \tag{7}$$

Nous connaissons maintenant G sur l'ensemble des rationnels positifs puisque (4), (5), (6) et (7) nous donnent

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G(r) = G(1)^r \tag{8}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}^+$, x est limite d'une suite décroissante (r_n) de rationnels. Comme G est continue à droite, $G(r_n)$ converge vers $G(x)$. D'autre part l'application $y \mapsto G(1)^y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en appliquant (8) à r_n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = G(1)^x. \tag{9}$$

A priori, la constante $G(1)$ est dans $]0\,,1]$. On peut écarter la valeur $G(1) = 1$ car sinon d'après (9), la limite en $+\infty$ de G serait 1 alors qu'elle vaut 0.

Finalement, puisque $0 < G(1) < 1$, on peut poser $G(1) = \mathrm{e}^{-a}$ pour un réel $a > 0$ (cela revient à prendre $a = -\ln G(1)$). On peut alors réécrire (9) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \mathrm{e}^{-ax}.$$

La fonction de survie G est donc la même que celle de la loi exponentielle de paramètre a, donc X suit cette loi. $\square$

1. la fonction de survie d'une loi exponentielle est défini de la manière suivante :

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

6.2 Loi de désintégration radioactive

Selon les physiciens, la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle. Considérons l'expérience $\mathcal{E}$: « on examine un noyau à l'instant[2] t ». On note S l'événement « Ce noyau n'est pas désintégré ». D'après la loi exponentielle, il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$P(S) = P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Supposons que l'on ait au départ ($t = 0$), dans notre corps radioactif, N_0 noyaux. On note X_t la variable aléatoire égale au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. Comme chaque noyau se désintègre indépendamment aux autres, on peut affirmer que X_t suit une loi binomiale de paramètres $n = N_0$ et $p = P(S) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donc donné par l'espérance de X_t :

$$N(t) = \mathbf{E}(X_t) = np = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

2. La constante λ est appelée « constante radioactive » du noyau