LEÇON N° 2

Variables aléatoires discrètes

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S

Prérequis

Probabilités

Références

- P. DUVAL, *Probabilité, TS*. http://lcs.werne.lyc14.ac-caen.fr/~duvalp
- G. COSTANTINI, *Probabilité : Généralités, conditionnement, indépendance*. Cours de Première S. URL : http://bacamaths.net
- L. GALLARDO, *Chapitre 3 : Variables aléatoires discrètes, espérance, variance et loi des grands nombres*. URL : www.lmpt.univ-tours.fr/~gallardo/coursProb1-09-10-3.pdf.

Table des matières

1 Loi de probabilités. Fonction de répartition

Dans cette leçon, les variables aléatoires considérées seront *discrètes* (c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé modélisant une certaine expérience aléatoire. On se place dans le cas où Ω est discret et dans ce cas on supposera que la tribu $\mathcal{F}$ des événements est égale à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de tous les sous-ensembles de Ω.

Définition 1.1 (Variable aléatoire discrète). On appelle *variable aléatoire discrète* définie sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

1. L'ensemble $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in D\}$ (avec $D = \{1, 2, \dots, N\}$ si $X(\Omega)$ est fini, et $D = \mathbb{N}^*$ si $X(\Omega)$ est dénombrable) des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.
2. Pour tout $x_i \in X(\Omega)$, on a :
$$[X = x_i] := \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$$
(c'est-à-dire l'ensemble $[X = x_i]$ est un événement). On dit que c'est l'événement $\ll X$ prend la valeur $x_i \gg$.

Exemple 1.2. On lance trois fois une pièce non truqué et on compte le nombre de fois où on obtient $\ll$ Face $\gg$. On définit ainsi une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec :
$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$
et
$$X(PPP) = 0,\ X(PPF) = 1,\ X(PFP) = 1,\ X(FPP) = 1$$
$$X(FFP) = 2,\ X(FPF) = 2,\ X(PFF) = 2,\ X(FFF) = 3.$$

Définition 1.3 (Loi de probabilité). Soit P une probabilité sur un univers Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n. Lorsqu'à chaque valeur x_i $(1 \leq i \leq n)$ de X on associe les probabilités p_i de l'événement $\ll X = x_i \gg$, on dit que l'on définit *une loi de probabilité* P_X de la variable aléatoire X.

Exemple 1.4. Dans l'exemple précédent, on a équiprobabilité de Ω (la probabilité d'obtenir un des événements élémentaires étant de $\frac{1}{8}$). La probabilité d'obtenir 2 fois le côté face de la pièce est de :
$$P_X(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

Définition 1.5 (Fonction de répartition). La *fonction de répartition* de la variable aléatoire X est la fonction F telle que :
$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \to & [0\,,1] \\ & & x & \mapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{array}.$$

PROPRIÉTÉ 1.6. La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.

Exemple 1.7. Avec l'exemple précédent, on a :
- Pour $x \in]-\infty\,,0[$, on a :
$$F(x) = 0$$
- Pour $x \in]0\,,1]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8}$$

— Pour $x \in]1\,,2]$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

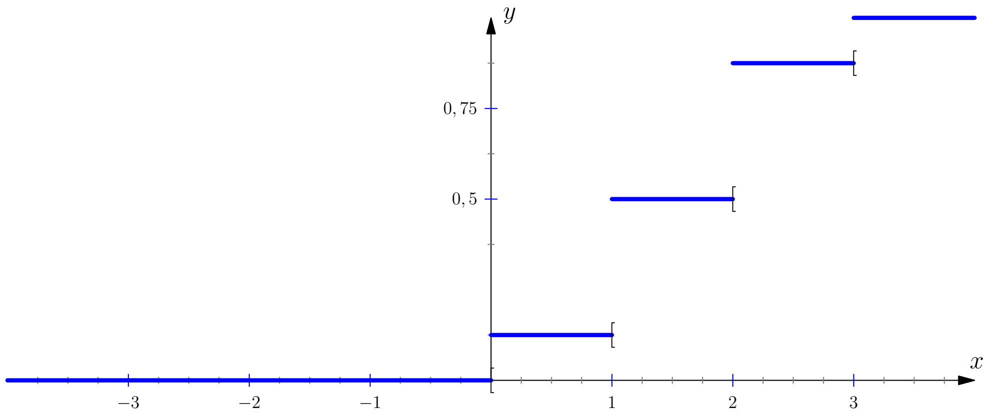
— Pour $x \in]2\,,3]$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

— Pour $x \in]3\,,4]$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Voici la représentation graphique :



2 Espérance mathématique

Définition 2.1 (Espérance mathématique). Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini [a]. On note $\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X. *L'espérance mathématique* de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\mathbf{E}(X)$, défini par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

a. Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général $x_n p_n$.

Remarque 2.2. L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

Exemple 2.3. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. On a :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

Remarque 2.4. On pourrait aussi calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Exemple 2.5 (Suite à la remarque 2.4).. Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$, cela donnerait :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \frac{1}{8}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\\ &= \frac{1}{8}[X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(FPP)\\ &\qquad\qquad + X(PFF) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF)]\\ &= \frac{1}{8}(0+1+1+2+1+2+2+3) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

THÉORÈME 2.6 (LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE). Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini. Soit P une probabilité sur Ω. On a :

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

En particulier, si b est un réel :

$$\mathbf{E}(X+b) = \mathbf{E}(X) + b$$

et pour tout réel k,

$$\mathbf{E}(kX) = k\mathbf{E}(X).$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 2.6.* On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)P(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\omega) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

En prenant Y constante égale à b, on obtient :

$$\mathbf{E}(X+b) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(b) = \mathbf{E}(X) + b.$$

De plus,

$$\mathbf{E}(kX) = \sum_{i=1}^{n} kp_i x_i = k\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = k\mathbf{E}(X).$$

$\square$

3 Variance et écart-type

Définition 3.1 (Variance et écart-type). Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini. On note $\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X).

— La *variance* de la variable aléatoire X est le nombre, notée $\mathrm{Var}(X)$, défini par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mathbf{E}(X))^2\\ &= p_1(x_1 - \mathbf{E}(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - \mathbf{E}(X))^2.\end{aligned}$$

— L'*écart-type* de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Remarques 3.2. 1. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

2. La variance est une quantité positive, donc l'écart-type est bien défini.

Exemple 3.3. Sur le problème du comptage du côté face, on calcule la variance de X :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{8}\left(0 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 3.4. Montrer que l'espérance $\mathbf{E}(X)$ minimise la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x)^2$$

mais pas la fonction g définie par :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left| x_i - x \right|.$$

$\Diamond$ *Réponse à l'exercice 3.4.* La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - 2x\sum_{i=1}^{n} p_i = -2(\mathbf{E}(X) - x).$$

On en déduit :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \mathbf{E}(X).$$

Donc f admet un minimum en $\mathbf{E}(X)$ (et ce minimum est $f(\mathbf{E}(X)) = \mathrm{Var}(X)$. L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts. Par contre, elle ne minimise ps la moyenne des écarts. En effet, on considère la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a :

$$\mathbf{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1000$$

$$g(\mathbf{E}(X)) = p_1 \left| x_1 - 1000 \right| + p_2 \left| x_2 - 1000 \right| = 90 + 90 = 180.$$

Or :

$$g(0) = \mathbf{E}(X) = 100.$$

Donc : $g(0) < g(\mathbf{E}(X))$. Conclusion : $\mathbf{E}(X)$ ne minimise pas la fonction g et on peut montrer que la médiane est ce minimum. □

THÉORÈME 3.5 (FORMULE DE KOENIG). La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2.$$

La variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne.

◊ *Démonstration de la formule de Koeing.* On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = b$ est égale à la constante b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2 - 2X\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2) \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(1)\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$. □

Exemple 3.6. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. On rappelle que X est le nombre de « face » obtenu. On a déjà calculé $\mathbf{E}(X)$, on calcule $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 = 3.$$

D'où :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Corollaire 3.7 (Effet d'un changement affine sur la variance et l'écart-type). Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels. On :

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X).$$

En particulier :

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\, \sigma(X)$$

et

$$\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X + b) = \sigma(X).$$

◊ *Démonstration du corollaire 3.7.* D'après la formule de Koeing, on a :

$$\mathrm{Var}(aX + b) = \mathbf{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [\mathbf{E}(aX + b)]^2$$

et d'après la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX + b) &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - [a\mathbf{E}(X) + b]^2 \\ &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - a^2[\mathbf{E}(X)]^2 - 2ab\mathbf{E}(X) - b^2 \\ &= a^2(\mathbf{E}(X^2)) - a^2(\mathbf{E}(X))^2 = a^2(\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2) = a^2 \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

D'où, par passage à la racine carrée :

$$\sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X).$$

Pour montrer la particularisation, il faut remplacer dans chaque formule $b = 0$ et $a = 1$ (selon le cas que l'on veut démonter). □

4 Exemples de variables aléatoires discrètes

4.1 Loi de Bernoulli

Définition 4.1. Une *expérience de Bernoulli* est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès » qui a pour probabilité p, l'autre appelée « échec » qui a pour probabilité $q = 1 - p$.

Définir une *loi de Bernoulli de paramètre p*, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple 4.2. Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face 6, on définit la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

PROPRIÉTÉ 4.3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors :
— L'espérance de X vaut $\mathbf{E}(X) = p$.
— La variance de X vaut $\mathrm{Var}(X) = pq$.

Exemple 4.4. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{6}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{36}$.

4.2 Loi binomiale

Définition 4.5 (Loi binomiale). La *loi binomiale de paramètres n et p*, notée $\mathrm{Bin}(n, p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répartition de n expériences de Bernoulli de paramètres p identiques et indépendantes. Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

Exemple 4.6. On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'intéresse à l'apparition de la face 6. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{6}$. On obtient donc une loi binomiale $\mathrm{Bin}(2, 1/6)$.

nombre de succès	0	1	2
probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

PROPRIÉTÉ 4.7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$ alors :
— L'espérance de X vaut $\mathbf{E}(X) = np$.
— La variance de X vaut $\mathrm{Var}(X) = npq$.

Exemple 4.8. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{18}$.

4.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :
— nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
— nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
— nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule. . .

Définition 4.9. La variable aléatoire X suit une *loi de Poisson de paramètre λ*, notée $\mathrm{Pois}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

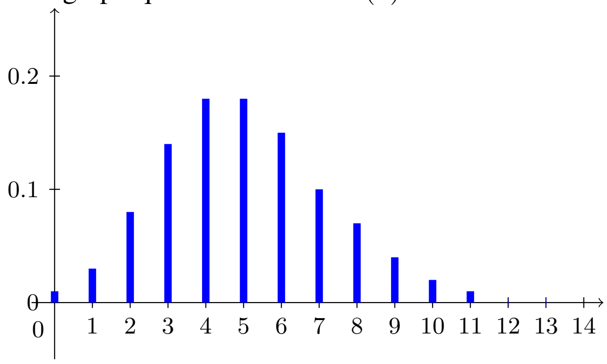
Exemple 4.10. On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

$\lozenge$

— Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de Poisson nous donne :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P(X=k)$	$0,007$	$0,034$	$0,084$	$0,140$	$0,176$	$0,176$	$0,146$	$0,104$	$0,065$	$0,036$	$0,018$	$0,008$	$0,003$	$0,001$	$0,000$

— On peut aussi représenter graphiquement la loi $\mathrm{Pois}(5)$:



— La probabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X = 10) = 0,018.$$

— La probabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265.$$

— La probabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= 1 - P(X < 8) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 7)] \\ &= 1 - 0,867 = 0,133 \end{aligned}$$

.

PROPRIÉTÉ 4.11. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $\mathbf{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Exemple 4.12. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 5$.

5 Applications

5.1 Jeux équitables

Deux joueurs A et B jouent à un jeu d'argent où la probabilité de gagner est égale à p pour A et $1-p$ pour B $(0 < p < 1)$. Les mises de A et B sont respectivement s et s' euros et le vainqueur empoche le total des enjeux. Soient X et X' les gains de joueurs A et B. Le jeu est dit *équitable* si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$. On a :

$$\mathbf{E}(X) = s'p - s(1-p) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y) = (1-p)s - s'p.$$

Le jeu est donc équitable si

$$\frac{s}{p} = \frac{s'}{1-p},$$

autrement dit si les enjeux des joueurs sont proportionnels à leur probabilité de succès.

5.2 Le jeu de St Petersbourg

Imaginons le jeu de casino suivant : on lance une pièce (non truquée) jusqu'à l'apparition du premier pile. Si cela se produit au n-ième lancer, la banque verse au joueur la somme $X = 2^n$ euros. Quel doit être l'enjeu que la banque devrait exiger du joueur pour ne pas être perdante ?

Pour que le jeu soit équitable, la mise doit être égale à l'espérance du gain du joueur. Mais l'espérance de X n'est pas finie car X prend les valeurs 2^n $(n \geq 1)$ et $P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n P(X = 2^n) = +\infty.$$