LEÇON N° 1

Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

Clément BOULONNE

Session 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Théorie des ensembles

Références

— G. COSTANTINI, *Probabilités (discrètres).* Cours de Première S.
— P. RIBEREAU, *Cours 5 Probabilités : Notion probas conditionelles et indépendance*.

Table des matières

1 Expérience aléatoire, événements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. On dit qu'on fait une expérience de type *aléatoire* si on ne peut pas prévoir le résultat final de cette expérience.

Exemples 1.2.
1. On lance une pièce et on observe le côté exposé (pile ou face). Il y a deux issues possibles sur cette expérience.
2. On dispose d'une urne avec 100 boules, on tire une d'entre elles et on note le numéro. Cette expérience aléatoire a 100 issues possibles.

Définition 1.3 (Univers). L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé *univers*. On note généralement cet ensemble Ω.

Remarque 1.4. Dans cette leçon, on se limitera au cas où Ω est un ensemble fini.

Exemple 1.5. On reprend les expériences de l'exemple 1.2
1. Si on lance une pièce de monnaie, on obtient $\Omega = \{P, F\}$.
2. Si on tire une boule numérotée dans une urne où il en contient 100 alors $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$.

1.2 Evénement associé à une expérience aléatoire

Dans ce qui suit, nous allons décrire ce qu'est un événement :

Définition 1.6 (Vocabulaire des évènements).
— Un *événement élémentaire* (qu'on note ω) est ce qui constitue l'une des issue de la situation étudiée (un élément de Ω).
— Un *événement* est un ensemble de plusieurs issues.
— L'événement ≪ *A et B* ≫ (qu'on note $A \cap B$) est l'événement constitué des issues communes aux deux événements.
— L'événement ≪ *A ou B* ≫ (qu'on note $A \cup B$) est l'événement constitué de toutes les issues des deux événements.
— Deux événements *incompatibles* A et B (qu'on note $A \cap B = \emptyset$) sont deux événements qui n'ont pas d'éléments en commun.
— L'événement est dit *contraire* de A (qu'on note $\overline{A}$) si A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A}$ forme la totalité des issues.

Exemples 1.7. On lance deux dés équilibrés. On calcule la somme des numéros qui apparaissent sur la face du dessus des deux dés.
1. Obtenir un 7 est un événement élémentaire : $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement :
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$
3. Obtenir un multiple de trois est un événement :
$$B = \{3, 6, 9, 12\}.$$
4. $A \cap B = \{6, 12\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
6. Si $C = \{10, 11, 12\}$ et $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $C \cap D = \emptyset$ donc C et D sont incompatibles.
7. Ici, A représente l'événement ≪ obtenir une somme impaire ≫. Ainsi, $\overline{A}$ représnte l'événement ≪ obtenir une somme paire ≫ et en plus :
   — $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
   — $A \cup \overline{A} = \Omega$.

2 Probabilité

2.1 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.1. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une *loi de probabilité* P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0\,,1]$ tels que :

$$\sum_i p_i = 1.$$

On appelle les nombres p_i, les *probabilités* (qu'on peut noter $p_i = P(\omega_i)$).

PROPOSITION 2.2 (PRINCIPE FONDAMENTAL). La probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Corollaire 2.3. $P(\Omega) = 1$.

Remarque 2.4. Dans le corollaire 2.3, on sous-entend qu'il y a n ($n \in \mathbb{N}$) événements élémentaires dans Ω et on fait l'hypothèse d'équiprobabilité (voir définition 2.8).

◊ *Démonstration du corollaire 2.3.*

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_i \omega_i\right) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1.$$

□

Exercice 2.5. On se donne les probabilités d'apparition des faces d'un dé truqué :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(\omega)$	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement $A =$ ≪ obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ≫.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

◊ *Solutions de l'exercice 2.5.*

1. On veut calculer la probabilité de l'événement $A =$ ≪ obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ≫. D'après le principe :

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,05 + 0,05 + 0,1 + 0,1 = 0,3.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir un 6. Le corollaire 2.3 nous donne :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

donc $P(6) = 0,5$.

□

Définition 2.6 (Autre définition). Soit Ω un unique et $\mathcal{A} = P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements associé à cette expérience aléatoire). On appelle *probabilité* P toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints (si $i \neq j$

alors $A_i \cap A_j = \emptyset$) alors :

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

2.2 Propriétés de calcul des probabilités

PROPRIÉTÉS 2.7. Soient $A, B \subset \Omega$. Alors :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. $\Diamond$

1. On applique 2 de la définition 2.6 à A et $\emptyset$ (ils sont disjoints car $A \cap \emptyset = \emptyset$) d'où :

   $$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \Leftrightarrow P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$

   et donc on en déduit que $P(\emptyset) = 0$.
2. Comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \emptyset$, on a :

   $$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$$

   Or $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$, d'où $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, de plus $(A \setminus B)$ et $A \cap B$ sont disjoints donc on peut appliquer la définition :

   $$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$
4. $A \subset B$ implique que $B = (B \cap \overline{A}) \cup A$. Cette réunion d'ensembles est en plus disjointe donc :

   $$P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}).$$

   Comme $P(B \cap \overline{A}) \geq 0$, $P(A) \leq P(B)$.
5. On a :

   $$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

   Les ensembles présents dans la réunion sont deux à deux disjoints donc :

   $$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Équiprobabilité

Définition 2.8 (Équiprobabilité). Si tous les éléments de Ω (l'univers d'une expérience aléatoire) ont la même propriété d'apparition alors Ω est dit *équiprobable*. Si $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

PROPRIÉTÉ 2.9. Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n_A \text{ fois}} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exercice 2.10. On lance un dé (non truqué), ainsi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On est dans le cas d'une équiprobabilité.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 5.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

$\Diamond$ *Solutions de l'exercice 2.10.*

1. La probabilité d'avoir un 5 est $P(5) = \frac{1}{6}$ ($\{5\}$ étant un événement élémentaire).
2. Comme l'événement « obtenir un nombre pair » est l'ensemble $\mathcal{T} = \{2, 4, 6\}$. On a : $\text{card}(\mathcal{T}) = 3$, d'où :

$$P(\mathcal{T}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Un exemple pour débuter

Exemple 3.1. On considère une population de 500 individus parmi lesquels il y a 180 femmes et 90 des 500 individus ont l'allèle du daltonisme. On choisit un individu au hasard dans cette population (c'est une expérience aléatoire). On note :

$$F = \text{« l'individu choisi est une femme »}$$
$$D = \text{« l'individu choisi possède l'allèle du daltonisme »}$$

$\Diamond$ L'univers Ω est l'ensemble des individus, il est *équiprobable*. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi, cette probabilité est égale à $\frac{1}{500}$. Donc :

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{90}{500} = 0,18.$$

Maintenant, on se restreint à la *sous-population des femmes*. On sait que 9 femmes possèdent l'allèle du daltonisme. L'univers Ω' est l'ensemble des femmes F. Il est *équiprobable*. Chaque femme a une chance sur 180 d'être choisie.

On cherche la probabilité qu'une femme choisi au hasard possède l'allèle du daltonisme :

$$\frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(\Omega')} = \frac{9}{180} = 0,05.$$

On note cette probabilité :

$$P_F(D) = \frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(F)} = \frac{P(D \cap F)}{P(F)}.$$

3.2 Probabilité conditionnelle

Définition 3.2. Soit F un événement de probabilité *strictement positive* (c'est-à-dire $F \subset \Omega$ et $P(F) > 0$). On appelle *probabilité conditionnelle* à F, l'application $P_F : \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ telle que :

$$\begin{array}{rccl} P_F & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0\,,1] \\ & & A & \mapsto & P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} \end{array}.$$

PROPOSITION 3.3. L'application P_F est une probabilité.

$\Diamond$ *Démonstration de la proposition 3.3.* On vérifie que P_F prend ses valeurs dans $[0\,,1]$. Si $A \cap F \subset F$ alors $P(A \cap F) \leq P(F)$ et ainsi :

$$\frac{P(A \cap F)}{P(F)} = P_F(A) \leq 1$$

et $P_F(A) \geq 0$ comme quotient de deux probabilités. On vérifie le point 1 de la définition 2.6 :

$$P_F(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

On vérifie ensuite le point 2 de la définition 2.6. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements dans Ω deux à deux disjoints.

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap F\right)}{P(F)} = \frac{P\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap F)\right)}{P(F)}.$$

Mais $A_i \cap F \subset A_i$ donc tous les $(A_i \cap F)$ sont deux à deux disjoints et :

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} P_F(A_i).$$

$\square$

PROPRIÉTÉ 3.4 (PROBABILITÉS COMPOSÉES). Soit Ω un univers, F et A deux événements tel que $P(F) > 0$. Alors,

$$P(A \cap F) = P_F(A) \times P(F) = P_A(F) \times P(A).$$

3.3 Formule des probabilités totales et de Bayes

PROPRIÉTÉ 3.5 (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES). Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i).$$

Exemple 3.6. On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules rouges et 4 boules vertes et l'urne U_2 contient 7 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux rouges en tout.

$\Diamond$ On note :

$$R = \{\text{rouge au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}\}, \quad R' = \{\text{rouge au } 2^{\text{e}} \text{ tirage}\},$$
$$H_1 = \{\text{choix de l'urne } U_1\}, \quad H_2 = \overline{H}_1 = \{\text{choix de l'urne } U_2\}.$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{H_1}(R \cap R') = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$P_{H_2}(R) = \frac{3}{10}, \quad P_{H_2}(R \cap R') = \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

La forme de conditionnement donne :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_{H_1}(R)P(H_1) + P_{H_2}(R)P(H_2) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{4+10}{40} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(R \cap R') &= P_{H_1}(R \cap R')P(H_1) + P_{H_2}(R \cap R')P(H_2) \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{27}{200}. \end{aligned}$$

Propriété 3.7 (Formule de Bayes). Soit $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ une partition d'événements non vides de Ω. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^n P_{E_i}(A) \times P(E_i)}.$$

Exemple 3.8. Un test sanguin a une probabilité de $0,95$ de détecter un certain virus lorsque celui-ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. On cherche la probabilité que la personne ait le virus sachant qu'elle est positif (et on sait que $0,5\%$ de la population est porteuse du virus).

$\Diamond$ On note :

$$V = \{\text{la personne testée a le virus}\},$$
$$T = \{\text{la personne testée a un test positif}\}.$$

On cherche $P_T(V)$. Or, on sait que :

$$P(V) = 0,005, \quad P_V(T) = 0,95, \quad P_{\overline{V}}(T) = 0,01.$$

On en déduit par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{P_V(T)P(V)}{P_V(T)P(V) + P_{\overline{V}}(T)P(\overline{V})} \\ &= \frac{0,95 \times 0,005}{0,95 \times 0,005 + 0,01 \times 0,995} \approx 0,323. \end{aligned}$$

3.4 Indépendance

Définition 3.9 (Indépendance de deux événements). Deux événements E et F sont indépendants si :

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F).$$

Remarque 3.10. D'après la propriété des probabilités composées, $P(E) = P_F(E)$ (si $P(F) > 0$). Ce résultat correspond à l'idée intuitive que si E et F sont *indépendants* alors la réalisation de F n'apporte pas d'information sur E.

Exemple 3.11. On jette deux fois le même dé. Les événements

$$A = \{\text{obtention d'un chiffre pair au premier lancer}\},$$
$$B = \{\text{obtention du 1 au deuxième lancer}\},$$

sont indépendants.

$\Diamond$ En effet, en prenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et si on fait l'hypothèse d'équiprobabilité dans Ω (P équiprobable), on vérifie que :

$$P(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}.$$
$$P(A \cap B) = \frac{3 \times 1}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

3.5 Un exercice pour finir

Exercice 3.12. Dans une urne sont placés 100 jetons rouges, dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1. On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.

Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les événements A : ≪ le jeton est rouge ≫ et B ≪ le jeton est numéroté 0 ≫ soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

$\Diamond$ *Solutions de l'exercice 3.12.* Soit x le nombre de jetons verts numérotés 1 qu'il faut rajouter dans l'urne. On peut dresser un tableau à double entrée pour obtenir le nombre de jetons de chaque catégorie.

Jetons	n° 0	n° 1
Rouges	50	50
Verts	30	x

On veut trouver la valeur de x telle que les événements A : ≪ le jeton est rouge ≫ et B ≪ le jeton est numéroté 0 ≫ soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne. On a ainsi :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &\Leftrightarrow \frac{50}{130 + x} = \frac{100}{130 + x} \times \frac{50 + 30}{130 + x} \\ &\Leftrightarrow \frac{50}{130 + x} = \frac{8000}{(130 + x)^2} \quad (*) \end{aligned}$$

$130 + x \neq 0$ car $x \geq 0$ donc :

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow 50(130 + x)^2 = 8000(130 + x) &\Leftrightarrow 50(130 + x) = 8000 \Leftrightarrow 130 + x = 160 \\ &\Leftrightarrow x = 160 - 130 \Leftrightarrow x = 30. \end{aligned}$$

Il faut donc rajouter 30 jetons verts numérotés 1 pour que les événements A : ≪ le jeton est rouge ≫ et B ≪ le jeton est numéroté 0 ≫ soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne. $\square$