Solutions aux problèmes

Janvier

1.1 Il existe sûrement plusieurs solutions. Moi, j'ai trouvé celle-ci :

$$2^2 \times 2^9 - (2^2)^2 \times 2 + 2 + 0 + 1 = 2019.$$

1.2 En effet, si on fait un rapide calcul, on trouve que la petite Marie a en sa possession :

$$130 + 70 + 13 + 27 = 240\,€.$$

Alors soit les parents de la petite Marie sont très généreux vis-à-vis de leur enfant (unique ?), soit il manque une précision dans l'énoncé comme, en début d'énoncé, « elle a économisé pendant 1 an pour s'acheter … »

1.3 Soit S l'expression suivante :

$$S = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99!$$

avec

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

On donne les premières valeurs de $n!$:

$$\begin{aligned}
1! &= 1\\
2! &= 1 \times 2 = 2\\
3! &= 1 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 = 6\\
4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24.
\end{aligned}$$

On peut remraquer une définition par récurrence pour $n!$, ce qui sera plus simple pour calculer les valeurs suivantes :

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)}_{(n-1)!} \times n = n \times (n-1)!$$

On peut donc calculer $5!$ et $6!$:

$$\begin{aligned}
5! &= 24 \times 5 = 120\\
6! &= 120 \times 6 = 720.
\end{aligned}$$

On remarque que, à partir de $n = 5$, le chiffre des unités de $n!$ est 0. Si on note $U(n)$ le chiffre des unités de n, on a :

$$\begin{aligned} U(S) &= U(1! + 2! + \cdots + 99!) = U(1! + 2! + 3! + 4!) + U(5! + \cdots + 99!) \\ &= U(1! + 2! + 3! + 4!) = U(1 + 2 + 6 + 24) = U(33) = 3. \end{aligned}$$

1.4 Pour résoudre ce problème, on fait une démonstration par l'absurde. On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui satisfait $f(2) = 3$ et $f(mn) = f(m) \times f(n)$ pour tout m et $n \in \mathbb{N}$. On calcule tout d'abord $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= f(2 \times 1) = f(2) \times f(1) \\ f(1) &= \frac{f(2)}{f(2)} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Comme f est strictement croissante, on a :

$$2 < 3 < 4 \Rightarrow f(2) < f(3) < f(4).$$

En calculant $f(4)$, on trouve :

$$f(4) = f(2 \times 2) = f(2) \times f(2) = 3 \times 3 = 9.$$

Si on pose $f(3) = k$, on a un éventail de valeurs pour k :

$$3 < k < 9.$$

Testons alors les valeurs possibles pour $f(3)$:

— Si on calcule $f(8)$, on trouve :

$$f(8) = f(2^3) = f(2)^3 = 27.$$

Ainsi, par strict croissance de la fonction f, il faut que $f(9) > 27$:

$$f(9) = f(3^2) = f(3) \times f(3) = k^2$$

donc $27 < k^2 < 81$. Ainsi, si $k = 4$ alors $f(9) = 16 < 27$ et si $k = 5$ alors $f(9) = 25 < 27$; les valeurs $k = 4$ et $k = 5$ sont d'emblée écartées.

— Si on calcule $f(27)$:

$$f(27) = k^3,$$

et si on remarque que :

$$f(16) < f(27) < f(32) \Rightarrow 81 < k^3 < 243,$$

on peut enlever les valeurs $k = 7$ et $k = 8$ de notre étude car $7^3 = 343 > 243$ et $8^3 = 512 > 243$. On a bien :

$$81 < 6^3 = 216 < 243.$$

— Reste plus qu'à montrer que 6 ne peut pas être une valeur possible pour k en remarquant que :

$$2^7 < 3^5 < 2^8 \Rightarrow f(2^7) < f(3^5) < f(2^8) \Rightarrow 3^7 < k^5 < 3^8.$$

On a : $6^5 = 7776$ et $3^8 = 6561$. Ainsi $7776 > 6561$ et $k = 6$ n'est pas une valeur possible.

Conclusion : il n'existe pas de valeurs possibles pour $f(3)$ donc il n'existe pas de fonction f qui vérifie les contraintes de l'énoncé.

1.5 La fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$.

Le but du problème est de trouver la longueur du triangle équilatéral (non réduit à un point) tel que l'un des sommets de ce triangle soit l'origine O du repère et les deux autres sommets sont des points de la parabole symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit OAB un tel triangle équilatéral. On a des informations sur les coordonnées si on pose $x > 0$[2] :

$$O(0,0)\ ;\ A(-x, x^2)\ ;\ B(x, x^2).$$

On cherche tout d'abord la valeur de x telle que :

$$OA = OB = AB.$$

Calculons les différentes longueur (avec comme remarque que $|x| = x$ car $x > 0$) :

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(-x-0)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{(-x)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4} \\ &= \sqrt{x^2(1+x^2)} = |x|\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} \\ OB &= \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^2+x^4} = \cdots = x\sqrt{1+x^2} \\ AB &= \sqrt{(x-(-x))^2 + (x^2-x^2)^2} = \sqrt{(2x)^2} = 2x. \end{aligned}$$

On cherche donc x tel que :

$$2x = x\sqrt{1+x^2} \underset{\Leftrightarrow}{x \neq 0} 2 = \sqrt{1+x^2} \underset{\Leftrightarrow}{1+x^2 > 0} 4 = 1 + x^2 \Leftrightarrow 3 = x^2 \underset{\Leftrightarrow}{x \geq 0} x = \sqrt{3}.$$

L'unique solution de l'équation $2x = x\sqrt{1+x^2}$ est $x = \sqrt{3}$ ainsi la lognueur du triangle équilatéral est égale à :

$$AB = 2\sqrt{3}.$$

2. $\neq 0$ car le triangle n'est pas réduit à un point, c'est-à-dire les points O, A et B sont deux à deux distincts.