

## Résumé

Je me souviens que, dans un article non publié sur CBMaths.fr, j'ai voulu tenté d'approcher  $\sqrt{21}$  en faisant une interpolation linéaire de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Je profite aussi de la sortie du n° 169 de Tangente Magazine sur les « Racines Carrées » pour écrire un article sur ces fameuses racines carrées et comment peut-on approximer les racines carrées entières (c'est-à-dire les racines carrées du type  $\sqrt{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ) par interpolation linéaire de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur les intervalles  $[k^2, (k+1)^2]$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

## 1 Approximation de $\sqrt{21}$

On remarque d'abord que :

$$16 \leq 21 \leq 25 \Rightarrow \sqrt{16} \leq \sqrt{21} \leq \sqrt{25} \Rightarrow 4 \leq \sqrt{21} \leq 5.$$

Ensuite, on considère le segment  $[16, 25]$ , les points  $A(16; 0)$ ,  $B(25; 0)$  et  $M(21; 0)$ . On cherche  $r \in \mathbb{Q}$  tel que  $AM = rAB$ .

$$AM = 21 - 16 = 5$$

$$AB = 25 - 16 = 9$$

$$AM = \frac{5}{9}AB \Rightarrow r = \frac{5}{9}$$

Or  $\frac{5}{9} \approx 0,55$ . Donc une approximation de  $\sqrt{21}$  peut être 4,55.

Quelle est la précision de cette approximation ? Sur XCas, on évalue la valeur de la racine carrée avec `evalf`.

```
evalf(sqrt(21))
4.58257569496
```

On y presque, non ? Enfin non, on a réussi à approximer la racine carrée à une décimale près

$$\left| \sqrt{21} - \left(4 + \frac{5}{9}\right) \right| \approx 0,0270$$

mais c'est déjà pas mal pour des collégiens ou des lycéens.

Peut-on généraliser la méthode ? Quelle est la précision globale de l'approximation ?

## 2 Notion d'interpolation et de précision linéaire

**Définition 2.1** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et  $a, b \in I$ . On appelle *interpolation linéaire* de  $f$  entre  $a$  et  $b$  la fonction affine  $L_f[a; b]$  telle que :

$$L_f[a; b](a) = f(a) \quad \text{et} \quad L_f[a; b](b) = f(b).$$

■ **Exemple 2.1** Soit  $f : x \mapsto (x-1)(6-x)$ . On veut trouver l'expression de l'interpolation linéaire de  $f$  entre 2 et 4. Or :

$$L_f[2; 4](2) = f(2) \quad \text{et} \quad L_f[2; 4](4) = f(4).$$

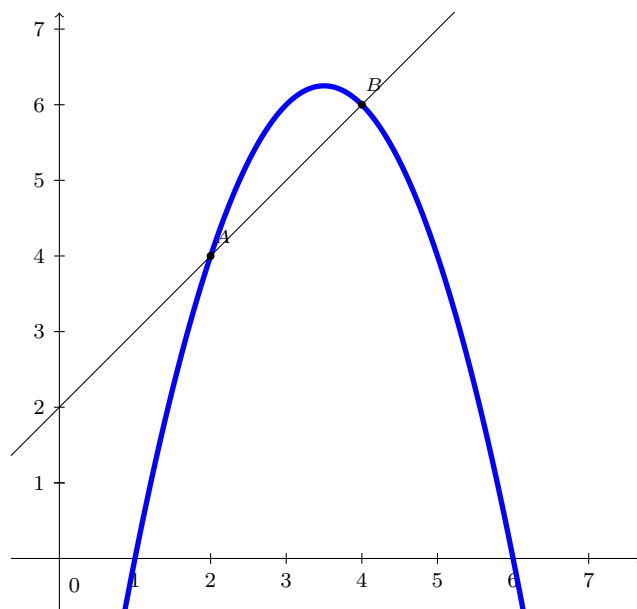
On résout alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = (2-1)(6-2) \\ 4a + b = (4-1)(6-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ 4a + (4 - 2a) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Donc :

$$L_f[2; 4] = x + 2.$$

(Sur la figure suivante, la courbe représentative de la fonction  $f$  est représentée en bleu et la courbe représentative de la fonction  $L_f[2; 4]$  est représentée en noire.) ■



**Théorème 2.1** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable,  $a, b \in I$  et  $L_f[a; b]$  l'interpolation linéaire de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .  $L_f[a; b] = \alpha x + \beta$  avec :

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

• **Preuve** Résolution du système d'équation :

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a) \\ \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$$

■ **Exemple 2.2** Pour l'exemple, nous aurions pu utiliser ce théorème pour calculer  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha = \frac{6 - 4}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{4 \times 4 - 2 \times 6}{2} = \frac{16 - 12}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

**Définition 2.2** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable,  $a, b \in I$  et  $L_f[a; b]$  l'interpolation linéaire de  $f$  entre  $a$  et  $b$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$ , on appelle *précision linéaire locale* de  $f$  en  $c$  sur  $[a; b]$ , le nombre  $PL_{L_f[a; b]}(c) = |L_f[a; b](c) - f(c)|$ .

Ⓜ Dans les conditions précédentes :

$$PL_{L_f[a; b]}(a) = PL_{L_f[a; b]}(b) = 0$$

■ **Exemple 2.3** On veut calculer la précision locale de  $f : x \mapsto (x - 1)(6 - x)$  en 3 sur  $[2; 4]$  est :

$$PL_{L_f[2; 4]}(3) = |L_f[2; 4](3) - f(3)| = |3 + 2 - 2 \times 3| = |5 - 6| = |-1| = 1.$$

**Définition 2.3** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable,  $a, b \in I$  et  $L_f[a; b]$  l'interpolation linéaire de  $f$  entre  $a$  et  $b$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$ , on appelle *précision linéaire globale* de  $f$  sur  $[a; b]$ , le nombre  $PG_{L_f[a; b]} = \int_a^b |L_f[a; b](x) - f(x)| dx$ .

**R**  $PG_{L_f[a; b]} = 0 \Leftrightarrow f = L_f[a; b]$

■ **Exemple 2.4** On veut calculer la précision linéaire globale de  $f : x \mapsto (x - 1)(6 - x)$  sur  $[2; 4]$  :

$$\begin{aligned} PG_{L_f[a; b]} &= \int_2^4 |x + 2 - (x - 1)(6 - x)| dx = \int_2^4 |x + 2 - (-x^2 + 7x - 6)| dx \\ &= \int_2^4 |(-x^2 + 7x - 6) - (x + 2)| dx = \int_2^4 |-x^2 + 6x - 8| dx \end{aligned}$$

On peut vérifier que  $H(x) = -x^2 + 6x - 8$  est positive sur  $[2; 4]$  (en calculant les racines et en utilisant la propriété des signes pour les fonctions du second degré).

$$\begin{aligned} PG_{L_f[a; b]} &= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x \right]_2^4 = \left[ -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^4 \\ &= -\frac{4^3}{3} + 3 \times 4^2 - 8 \times 4 - \left( -\frac{2^3}{3} + 3 \times 2^2 - 8 \times 2 \right) \\ &= -\left( \frac{64 - 8}{3} \right) + 3 \times (16 - 4) - 8 \times (4 - 2) = -\frac{56}{3} + 36 - 16 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

■

### 3 Interpolation linéaire de la fonction racine carrée

Soit :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

On connaît quelques points à coordonnées entières de la courbe représentative de la fonction racine carrée. C'est tous les points de la forme  $(k^2; k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

On peut alors faire une interpolation linéaire sur les intervalles  $[k^2, (k + 1)^2]$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

On obtient alors les fonctions suivantes :

$$L_f([k^2, (k + 1)^2]) = \alpha_k x + \beta_k$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{k + 1 - k}{(k + 1)^2 - k^2} = \frac{(k + 1 - k)}{(k + 1 - k)(k + 1 + k)} = \frac{1}{k + 1 + k} = \frac{1}{2k + 1} \\ \beta_k &= \frac{k(k + 1)^2 - (k + 1)k^2}{(k + 1)^2 - k^2} = \frac{k^3 + 2k^2 + k - k^3 - k^2}{2k + 1} = \frac{k^2 + k}{2k + 1} = \frac{k(k + 1)}{2k + 1} \end{aligned}$$

■ **Exemple 3.1** Sur  $[0; 1]$ ,

$$L_f([0; 1]) = \alpha_0 x + \beta_0 = \frac{1}{1} x + \frac{0}{1} = x$$

Sur  $[1; 4]$ ,

$$L_f([1; 4]) = \alpha_1 x + \beta_1 = \frac{1}{3} x + \frac{1 \times 2}{3} = \frac{1}{3} x + \frac{2}{3}.$$

Sur  $[4; 9]$ ,

$$L_f([4; 9]) = \alpha_2 x + \beta_2 = \frac{1}{5} x + \frac{2 \times 3}{5} = \frac{1}{5} x + \frac{6}{5}.$$

■

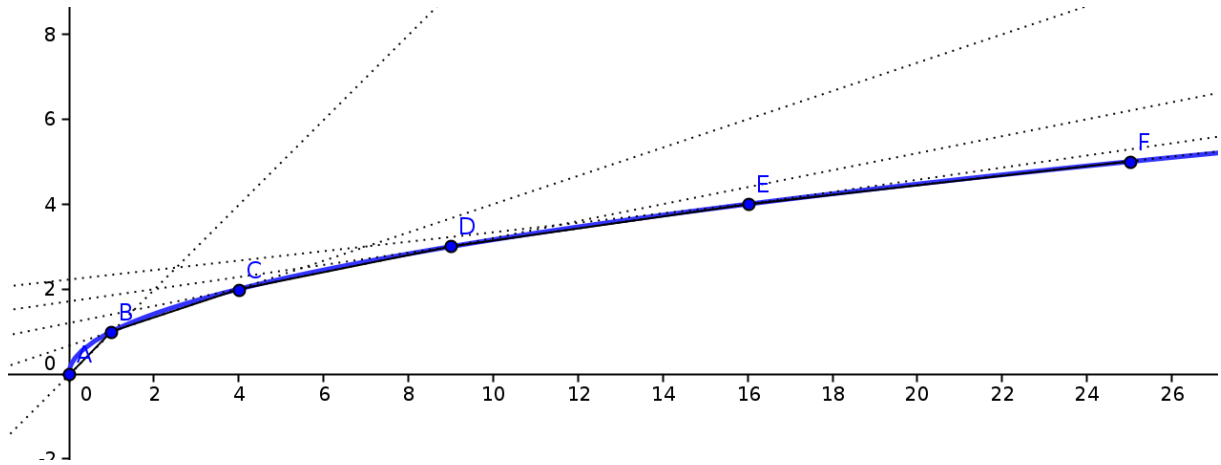


FIGURE 1 – Tracé de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  et de ces interpolations linéaires sur les intervalles  $[k^2; (k+1)^2]$

On s'intéresse maintenant à la précision globale des interpolations linéaires sur les intervalles  $[k^2, (k+1)^2]$ . Lors de mon travail de recherche sur l'article, j'ai voulu calculer cette précision pour un  $k$  quelconque appartenant à  $\mathbb{N}$ . Je me suis dit que j'allais tomber sur une formule en fonction de  $k$  et déduire la convergence de cette méthode d'interpolation pour calculer des approximations de racines (c'est-à-dire plus  $k$  est grand, plus l'approximation est précise). Sauf que !

Je vais vous proposer deux exemples qui ont constitué des exemples de vérification de ma formule.

■ **Exemples 3.1** Sur  $[0; 1]$ ,

$$PG_{L_f([0;1])} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Sur  $[1; 4]$ ,

$$\begin{aligned} PG_{L_f([1;4])} &= \int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) dx = \left[ \frac{3}{2}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \right]_1^4 \\ &= \frac{3 \times 4^{3/2}}{2} - \frac{4^2}{6} - \frac{8}{3} - \left[ \frac{3 \times 1^{3/2}}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{3 \times 8}{2} - \frac{16}{6} - \frac{8}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{14}{3} - \frac{15}{6} - 2 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

Je vous laisse vérifier les calculs. On peut ensuite énumérer le théorème central de cet article.

**Théorème 3.1** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$PG_{L_f([k^2; (k+1)^2])} = \int_{k^2}^{(k+1)^2} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2k+1}x - \frac{k(k+1)}{2k+1} \right) dx = \frac{1}{6}.$$

• **Preuve** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On calcule :

$$PG_{L_f([k^2; (k+1)^2])} = \int_{k^2}^{(k+1)^2} \left| \frac{x}{2k+1} + \frac{k^2+k}{2k+1} - \sqrt{x} \right| dx.$$

On peut montrer que, pour tout  $x \in [k^2; (k+1)^2]$ ,  $\sqrt{x} \geq \frac{x}{2k+1} + \frac{k^2+k}{2k+1}$ . Donc :

$$\begin{aligned}
 PG_{L_f((k^2; (k+1)^2))} &= \int_{k^2}^{(k+1)^2} \sqrt{x} - \frac{x}{2k+1} - \frac{k^2+k}{2k+1} dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{4k+2} - \frac{(k^2+k)x}{2k+1} \right]_{k^2}^{(k+1)^2} \\
 &= \frac{2}{3} [(k+1)^2]^{3/2} - \frac{(k+1)^4}{4k+2} - \frac{k^2+k}{2k+1} [(k+1)^2 - k^2] \\
 &= \frac{2}{3} [(k+1)^3 - k^3] - \frac{1}{2(2k+1)} [(k+1)^4 - k^4] - \frac{k^2+k}{2k+1} (2k+1) \\
 &= \frac{2}{3} (3k^2 + 3k + 1) - \frac{1}{2(2k+1)} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + k) \\
 &= 2k^2 + 2k + \frac{2}{3} - \frac{2k^3}{2k+1} - \frac{3k^2}{2k+1} - \frac{2k}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - k^2 - k \\
 &= k^2 + k + \frac{2}{3} - \frac{2k^3}{2k+1} - \frac{3k^2}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} \\
 &= -\frac{2k^3}{2k+1} + \left(1 - \frac{3}{2k+1}\right)k^2 + \left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)k + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2(2k+1)}\right) \\
 &= -\frac{2k^3}{2k+1} + \frac{k^2(2k+1) - 3k^2}{2k+1} + \frac{k(2k+1) - 2k}{2k+1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2(2k+1)} \\
 &= \frac{k^2 - 3k^2 + 2k^2 + k - 2k}{2k+1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2(2k+1)} = \frac{-k}{2k+1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2(2k+1)} \\
 &= \frac{-2k - 1}{2(2k+1)} + \frac{2}{3} = \frac{-6k - 3 + 2(2(2k+1))}{6(2k+1)} \\
 &= \frac{-6k - 3 + 8k + 4}{6(2k+1)} = \frac{2k+1}{6(2k+1)} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

**R**

1. Le théorème nous dit que les surfaces de la figure 2 ont la même aire.
2. D'après le graphique 3 (page 8) et les résultats des tableaux des pages suivantes, on peut remarquer que l'approximation locale s'améliore quand  $k$  est grand. On peut espérer approcher la racine carrée au centième près lorsque  $k \geq 12$ .

k	n	Vn	$n/(2k+1)+(k^2+k)/(2k+1)$	PL	5	30	5,4772255751	5,4545454545	0,0226801205
0	0	0	0	0	5	31	5,5677643628	5,5454545455	0,0223098174
1	1	1	1	0	5	32	5,6568542495	5,6363636364	0,0204906131
1	2	1,4142135624	1,3333333333	0,080880229	5	33	5,7445626465	5,7272727273	0,0172899193
1	3	1,7320508076	1,6666666667	0,0653841409	5	34	5,8309518948	5,8181818182	0,0127700767
2	4	2	2	0	5	35	5,9160797831	5,9090909091	0,006988874
2	5	2,2360679775	2,2	0,0360679775	6	36	6	6	0
2	6	2,4494897428	2,4	0,0494897428	6	37	6,0827625303	6,0769230769	0,0058394534
2	7	2,6457513111	2,6	0,0457513111	6	38	6,164414003	6,1538461538	0,0105678491
2	8	2,8284271247	2,8	0,0284271247	6	39	6,2449979984	6,2307692308	0,0142287676
3	9	3	3	0	6	40	6,3245553203	6,3076923077	0,0168630126
3	10	3,1622776602	3,1428571429	0,0194205173	6	41	6,4031242374	6,3846153846	0,0185088528
3	11	3,3166247904	3,2857142857	0,0309105046	6	42	6,4807406984	6,4615384615	0,0192022369
3	12	3,4641016151	3,4285714286	0,0355301866	6	43	6,5574385243	6,5384615385	0,0189769858
3	13	3,6055512755	3,5714285714	0,034122704	6	44	6,6332495807	6,6153846154	0,0178649653
3	14	3,7416573868	3,7142857143	0,0273716725	6	45	6,7082039325	6,6923076923	0,0158962402
3	15	3,8729833462	3,8571428571	0,0158404891	6	46	6,7823299831	6,7692307692	0,0130992139
4	16	4	4	0	6	47	6,856546004	6,8461538462	0,0095007542
4	17	4,1231056256	4,1111111111	0,0119945145	6	48	6,9282032303	6,9230769231	0,0051263072
4	18	4,2426406871	4,2222222222	0,0204184649	7	49	7	7	0
4	19	4,3588989435	4,3333333333	0,0255656102	7	50	7,0710678119	7,0666666667	0,0044011452
4	20	4,472135955	4,4444444444	0,0276915106	7	51	7,1414284285	7,1333333333	0,0080950952
4	21	4,582575695	4,5555555556	0,0270201394	7	52	7,2111025509	7,2	0,0111025509
4	22	4,6904157598	4,6666666667	0,0237490932	7	53	7,2801098893	7,2666666667	0,0134432226
4	23	4,7958315233	4,7777777778	0,0180537455	7	54	7,3484692283	7,3333333333	0,015135895
4	24	4,8989794856	4,8888888889	0,0100905967	7	55	7,4161984871	7,4	0,0161984871
5	25	5	5	0	7	56	7,4833147735	7,4666666667	0,0166481069
5	26	5,0990195136	5,0909090909	0,0081104227	7	57	7,5498344353	7,5333333333	0,0165011019
5	27	5,1961524227	5,1818181818	0,0143342409	7	58	7,6157731059	7,6	0,0157731059
5	28	5,2915026221	5,2727272727	0,0187753494	7	59	7,6811457479	7,6666666667	0,0144790812
5	29	5,3851648071	5,3636363636	0,0215284435	7	60	7,7459666924	7,7333333333	0,0126333591
					7	61	7,8102496759	7,8	0,0102496759

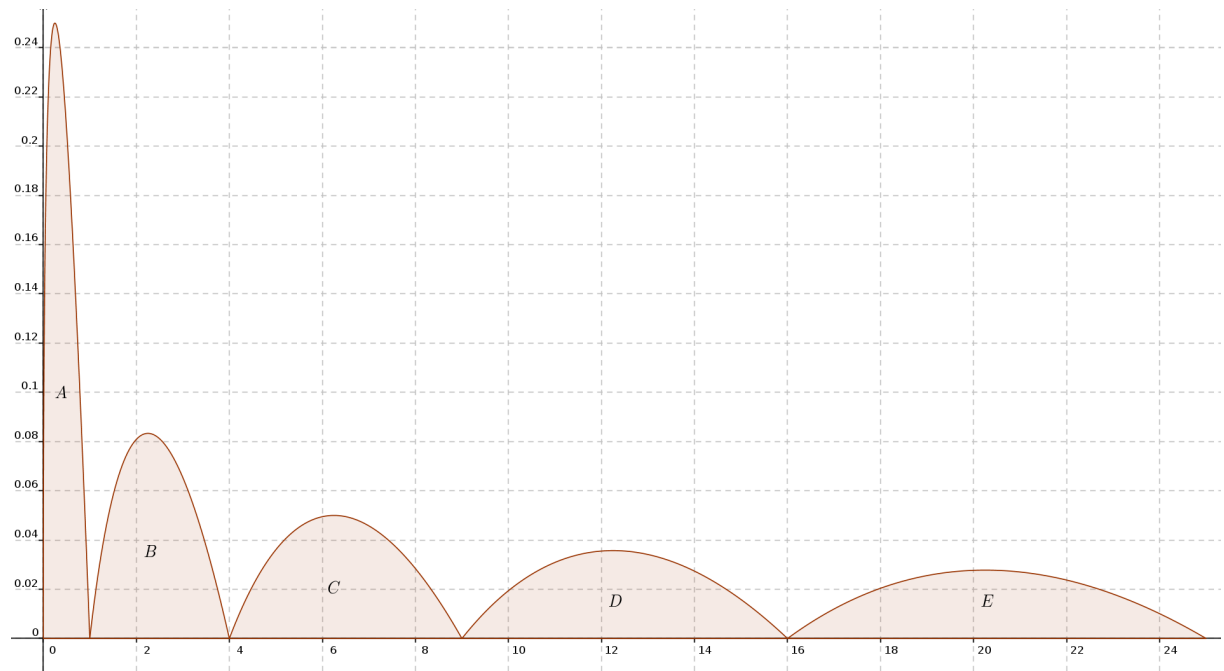


FIGURE 2 – Les domaines  $A, B, C, D$  et  $E$  ont une aire de  $\frac{1}{6}UA$

7	62	7,874007874	7,866666667	0,0073412073	9	94	9,6953597148	9,6842105263	0,0111491885
7	63	7,9372539332	7,9333333333	0,0039205999	9	95	9,7467943448	9,7368421053	0,0099522395
8	64	8	8	0	9	96	9,7979589711	9,7894736842	0,0084852869
8	65	8,0622577483	8,0588235294	0,0034342189	9	97	9,8488578018	9,8421052632	0,0067525386
8	66	8,1240384046	8,1176470588	0,0063913458	9	98	9,8994949366	9,8947368421	0,0047580945
8	67	8,1853527719	8,1764705882	0,0088821836	9	99	9,9498743711	9,9473684211	0,00250595
8	68	8,2462112512	8,2352941176	0,0109171336	10	100	10	10	0
8	69	8,3066238629	8,2941176471	0,0125062159	10	101	10,049875621	10,0476190476	0,0022565735
8	70	8,3666002653	8,3529411765	0,0136590889	10	102	10,099504938	10,0952380952	0,0042668431
8	71	8,4261497732	8,4117647059	0,0143850673	10	103	10,148891565	10,1428571429	0,0060344222
8	72	8,4852813742	8,4705882353	0,0146931389	10	104	10,198039027	10,1904761905	0,0075628367
8	73	8,5440037453	8,5294117647	0,0145919806	10	105	10,246950766	10,2380952381	0,0088555279
8	74	8,602325267	8,5882352941	0,0140899729	10	106	10,295630141	10,2857142857	0,0099158553
8	75	8,6602540378	8,6470588235	0,0131952143	10	107	10,344080433	10,3333333333	0,0107470995
8	76	8,7177978871	8,7058823529	0,0119155341	10	108	10,392304845	10,380952381	0,0113524645
8	77	8,7749643874	8,7647058824	0,010258505	10	109	10,440306509	10,4285714286	0,0117350803
8	78	8,8317608663	8,8235294118	0,0082314546	10	110	10,488088482	10,4761904762	0,0118980055
8	79	8,8881944173	8,8823529412	0,0058414761	10	111	10,535653753	10,5238095238	0,011844229
8	80	8,94427191	8,9411764706	0,0030954394	10	112	10,583005244	10,5714285714	0,0115766728
9	81	9	9	0	10	113	10,630145813	10,619047619	0,0110981937
9	82	9,0553851381	9,0526315789	0,0027535592	10	114	10,677078252	10,666666667	0,0104115854
9	83	9,1104335791	9,1052631579	0,0051704212	10	115	10,723805295	10,7142857143	0,0095195805
9	84	9,1651513899	9,1578947368	0,0072566531	10	116	10,770329614	10,7619047619	0,0084248524
9	85	9,2195444573	9,2105263158	0,0090181415	10	117	10,816653826	10,8095238095	0,0071300169
9	86	9,2736184955	9,2631578947	0,0104606008	10	118	10,862780491	10,8571428571	0,0056376341
9	87	9,3273790531	9,3157894737	0,0115895794	10	119	10,908712115	10,9047619048	0,0039502099
9	88	9,3808315196	9,3684210526	0,012410467	10	120	10,95445115	10,9523809524	0,0020701977
9	89	9,4339811321	9,4210526316	0,0129285005	11	121	11	11	0
9	90	9,4868329805	9,4736842105	0,01314877	11	122	11,045361017	11,0434782609	0,0018827563
9	91	9,5393920142	9,5263157895	0,0130762247	11	123	11,090536506	11,0869565217	0,0035799847
9	92	9,5916630466	9,5789473684	0,0127156782	11	124	11,135528726	11,1304347826	0,0050939431
9	93	9,643650761	9,6315789474	0,0120718136	11	125	11,180339887	11,1739130435	0,006426844



11	126	11,22497216	11,2173913043	0,007580856	12	158	12,56980509	12,56	0,00980509
11	127	11,26942767	11,2608695652	0,0085581044	12	159	12,609520213	12,6	0,0095202129
11	128	11,313708499	11,3043478261	0,0093606729	12	160	12,649110641	12,64	0,0091106407
11	129	11,357816692	11,347826087	0,0099906046	12	161	12,68857754	12,68	0,0085775404
11	130	11,401754251	11,3913043478	0,0104499032	12	162	12,727922061	12,72	0,0079220614
11	131	11,445523142	11,4347826087	0,0107405336	12	163	12,767145335	12,76	0,0071453348
11	132	11,489125293	11,4782608696	0,0108644235	12	164	12,806248475	12,8	0,0062484749
11	133	11,532562595	11,5217391304	0,0108234642	12	165	12,845232579	12,84	0,0052325787
11	134	11,575836903	11,5652173913	0,0106195115	12	166	12,884098727	12,88	0,0040987267
11	135	11,618950039	11,6086956522	0,0102543864	12	167	12,922847983	12,92	0,0028479833
11	136	11,66190379	11,652173913	0,0097298766	12	168	12,961481397	12,96	0,0014813968
11	137	11,704699911	11,6956521739	0,0090477368	13	169	13	13	0
11	138	11,747340124	11,7391304348	0,0082096897	13	170	13,03840481	13,037037037	0,0013677734
11	139	11,789826123	11,7826086957	0,0072174269	13	171	13,076696831	13,0740740741	0,0026227565
11	140	11,832159566	11,8260869565	0,0060726097	13	172	13,114877049	13,1111111111	0,0037659375
11	141	11,874342087	11,8695652174	0,0047768696	13	173	13,152946438	13,1481481481	0,0047982898
11	142	11,916375288	11,9130434783	0,0033318096	13	174	13,190909598	13,1851851852	0,0052707731
11	143	11,958260743	11,9565217391	0,001739004	13	175	13,228756555	13,2222222222	0,0065343331
12	144	12	12	0	13	176	13,266499161	13,2592592593	0,0072399022
12	145	12,041594579	12,04	0,0015945788	13	177	13,304134696	13,2962962963	0,0078383994
12	146	12,083045974	12,08	0,0030459736	13	178	13,341664064	13,3333333333	0,0083307308
12	147	12,124355653	12,12	0,004355653	13	179	13,37908816	13,3703703704	0,0087177899
12	148	12,165525061	12,16	0,0055250606	13	180	13,416407865	13,4074074074	0,0090004576
12	149	12,206555616	12,2	0,0065556157	13	181	13,453624047	13,4444444444	0,0091796026
12	150	12,247448714	12,24	0,0074487139	13	182	13,490737563	13,4814814815	0,0092560818
12	151	12,288205727	12,28	0,0082057274	13	183	13,527749258	13,5185185185	0,00923074
12	152	12,328828006	12,32	0,0088280059	13	184	13,564659966	13,5555555556	0,0091044107
12	153	12,369316877	12,36	0,0093168769	13	185	13,601470509	13,5925925926	0,0088779161
12	154	12,409673646	12,4	0,009673646	13	186	13,638181697	13,6296296296	0,0085520674
12	155	12,449899598	12,44	0,009899598	13	187	13,674794331	13,6666666667	0,0081276645
12	156	12,489995997	12,48	0,0099959968	13	188	13,711309201	13,7037037037	0,0076054971
12	157	12,529964086	12,52	0,0099640861	13	189	13,747727085	13,7407407407	0,0069863441
					14	222	14,899664426	14,8965517241	0,0031127016
					14	223	14,933184523	14,9310344828	0,0021500403
					14	224	14,966629547	14,9655172414	0,0011123057
					15	225	15	15	0
13	190	13,784048752	13,7777777778	0,0062709743	15	226	15,033296378	15,0322580645	0,0010383139
13	191	13,820274961	13,8148148148	0,0054601463	15	227	15,066519173	15,064516129	0,0020030443
13	192	13,856406461	13,8518518519	0,0045546087	15	228	15,099668871	15,0967741935	0,002894677
13	193	13,892443989	13,8888888889	0,0035551006	15	229	15,13274595	15,1290322581	0,0037136924
13	194	13,928388277	13,9259259259	0,0024623513	15	230	15,165750888	15,1612903226	0,0044605655
13	195	13,964240044	13,962962963	0,0012770808	15	231	15,198684154	15,1935483871	0,0051357665
14	196	14	14	0	15	232	15,231546212	15,2258064516	0,0057397601
14	197	14,035668848	14,0344827586	0,001186089	15	233	15,264337522	15,2580645161	0,0062730063
14	198	14,071247279	14,0689655172	0,0022817622	15	234	15,297058541	15,2903225806	0,0067359601
14	199	14,10673598	14,1034482759	0,0032877038	15	235	15,329709717	15,3225806452	0,0071290716
14	200	14,142135624	14,1379310345	0,0042045892	15	236	15,362291496	15,3548387097	0,0074527861
14	201	14,177446879	14,1724137931	0,0050330857	15	237	15,394804318	15,3870967742	0,0077075441
14	202	14,212670404	14,2068965517	0,0057738518	15	238	15,427248621	15,4193548387	0,0078937818
14	203	14,247806849	14,2413793103	0,0064275384	15	239	15,459624834	15,4516129032	0,0080119305
14	204	14,282856857	14,275862069	0,0069947881	15	240	15,491933385	15,4838709677	0,0080624171
14	205	14,317821063	14,3103448276	0,0074762357	15	241	15,524174696	15,5161290323	0,008045664
14	206	14,352700094	14,3448275862	0,0078725082	15	242	15,556349186	15,5483870967	0,0079620893
14	207	14,38749457	14,3793103448	0,0081842251	15	243	15,588457268	15,5806451613	0,0078121068
14	208	14,422205102	14,4137931034	0,0084119984	15	244	15,620499352	15,6129032258	0,007596126
14	209	14,456832295	14,4482758621	0,0085564327	15	245	15,652475842	15,6451612903	0,0073145522
14	210	14,491376746	14,4827586207	0,0086181255	15	246	15,684387141	15,6774193548	0,0069677865
14	211	14,525839046	14,5172413793	0,008597667	15	247	15,716233646	15,7096774194	0,0065562261
14	212	14,560219779	14,5517241379	0,0084956406	15	248	15,748015748	15,7419354839	0,0060802642
14	213	14,594519519	14,5862068966	0,0083126228	15	249	15,779733838	15,7741935484	0,0055402897
14	214	14,628738838	14,6206896552	0,0080491832	15	250	15,811388301	15,8064516129	0,0049366879
14	215	14,662878299	14,6551724138	0,0077058848	15	251	15,842979518	15,8387096774	0,0042698403
14	216	14,696938457	14,6896551724	0,0072832843	15	252	15,874507866	15,8709677419	0,0035401245
14	217	14,730919863	14,724137931	0,0067819316	15	253	15,905973721	15,9032258065	0,0027479141
14	218	14,76482306	14,7586206897	0,0062023706	15	254	15,937377451	15,935483871	0,0018935795
14	219	14,798648587	14,7931034483	0,0055451387	15	255	15,968719423	15,9677419355	0,0009774872
14	220	14,832396974	14,8275862069	0,0048107673					
14	221	14,866068747	14,8620689655	0,0039997818					

## 4 Interpolation linéaire et tangente

On peut relier la notion d'approximation linéaire d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$  avec celle de tangente en un point.

Ⓡ Si  $f$  est dérivable en un point  $c \in \mathbb{R}$ , alors sa tangente a pour équation :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

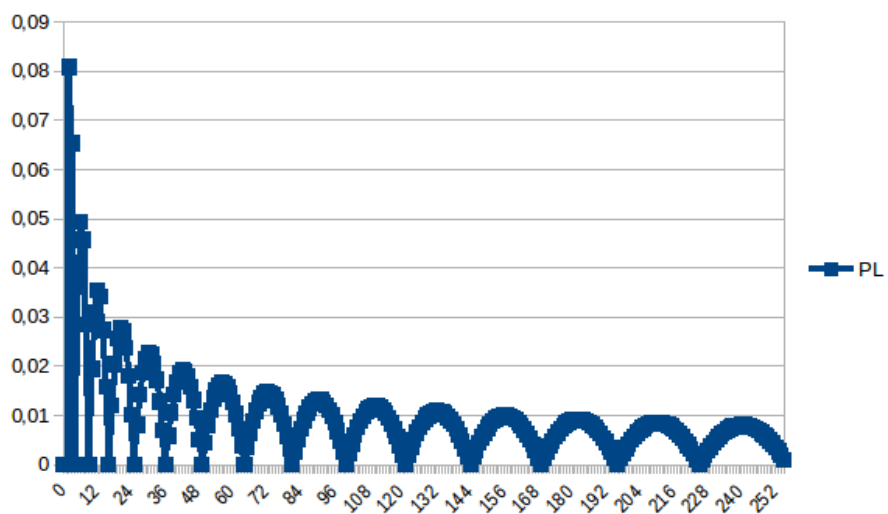


FIGURE 3 – Précision linéaire locale de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$

C'est aussi l'approximation linéaire de  $f$  sur l'intervalle  $[c; c + \varepsilon]$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ .