Décomposition en facteurs de factoriels premiers (DFFP)

Clément BOULONNE— 25 juin 2015

Résumé

Dans cet article, on cherche si le nombre $n!$ (où n est un nombre entier) se décompose comme suit :

$$n = \prod_{1 \leq k \leq t} a_k!$$

où $(a_k)_{1 \leq k \leq t}$ est une suite de nombres premiers et t un nombre entier naturel.

1 Le problème DFFP

1.1 Le problème initial

Voici le problème qui m'a donné l'idée de cette article :

Résoudre l'équation en n :

$$n! = 3! \times 5! \times 7!.$$

La réponse a été trouvée très rapidement par Raistlin Lagache sur la page Facebook de CBMaths (https://www.facebook.com/CBMaths1). Il suffit de connaître la définition d'une factorielle.

Définition 1.1 — Factorielle. Soit n un nombre entier naturel. On appelle *factorielle* du nombre n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{1 \leq k \leq n} k.$$

Avant de donner la solution, on donne une propriété qui permet de définir par récurrence la factorielle d'un nombre n :

Théorème 1.1 La factorielle d'un nombre naturel peut se définir par récurrence.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad n! = (n-1)! \times n \end{cases}.$$

On décompose (on peut omettre $1 \times \cdots$ car, pour tout nombre n, $1 \times n = n$) :

$$3! \times 5! \times 7! = \underbrace{2 \times 3}_{3!} \times \underbrace{2 \times 3 \times 4 \times 5}_{5!} \times \underbrace{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}_{7!}.$$

On essaie de rassembler les termes pour former une factorielle d'un nombre entier :

$$3! \times 5! \times 7! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 3.$$

On veut maintenant former le terme 8 en se rappelant que $8 = 4 \times 2$:

$$3! \times 5! \times 7! = 7! \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 = 7! \times 8 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 = 8! \times 3 \times 5 \times 2 \times 3.$$

Et ainsi de suite...

$$3! \times 5! \times 7! = 8! \times 9 \times 10 = 9! \times 10 = 10!.$$

1.2 Facteurs factoriels

Dans cette courte section, on donne une définition de « décomposition en facteurs factoriels premiers » (ou DFFP en abrégé). Cette définition s'inspire du théorème fondamental de l'arithmétique :

Théorème 1.2 — Théorème fondamental de l'arithmétique. Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, il existe une suite de nombres premiers $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite de nombres entiers naturels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Voici la définition de la décomposition en facteurs factoriels premiers (DFFP) :

Définition 1.2 — Décomposition en facteurs factoriels premiers (DFFP). Soit n un entier naturel. La DFFP (si elle existe) s'écrit ainsi :

$$n! = \prod_{1\le k\le t} a_k!$$

où $(a_k)_{1\le k\le t}$ est une suite de nombres premiers et t est un nombre entier.

1.3 Décomposition d'un nombre premier

Un nombre premier se décompose très simplement en facteurs premiers. Si p est un nombre premier (≥ 2) alors :

$$p = 1 \times p.$$

Cette simplicité se retrouve dans la DFFP d'un nombre premier.

Théorème 1.3 — DFFP d'un nombre premier. Soit p un nombre premier. Sa décomposition en facteurs factoriels premiers existe et s'écrit de la manière suivante :

$$p! = 1 \times p!$$

Ainsi, dans la définition 1.2, la suite (p_k) qui convient est la suite à un terme p, le nombre premier et celle des (α_k) est la suite à un terme 1.

1.4 Premières décompositions et remarques

D'après la section précédente, on a déjà les décompositions de facteurs factoriels premiers des nombres premiers.

On commence donc par le nombre $4!$:

$$\begin{aligned}
&4! = 2\times 3\times 4 = 3!\times 4 = 3!\times 2\times 2 = 3!\times 2!\times 2!\\
&6! = 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 5!\times 6 = 5!\times 2\times 3 = 5!\times 3!\\
&8! = 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8 = 7!\times 2\times 2\times 2 = 7!\times 2!\times 2!\times 2!\\
&9! = 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9 = 7!\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3 = 7!\times 2\times 3\times 2\times 3\times 2 = 7!\times 3!\times 3!\times 2!
\end{aligned}$$

On peut remarquer quelque chose dans les premières décompositions :

Proposition 1.1 Soit (P_n) la suite des nombres premiers et k un nombre entier naturel ≥ 2. Il existe donc un entier t tel que :

$$P_t \le k \le P_{t-1}$$

et, dans la DFFP du nombre k, il y aura, dans la suite des (p_k), le terme P_t.

- **Preuve** Décomposons le nombre entier naturel k (selon la définition 1.1) :

$$k = \prod_{1\le j\le k} j = \underbrace{\prod_{1\le i\le P_t} i}_{\Pi_i} \times \underbrace{\prod_{P_t+1\le j\le k} j}_{\Pi_j}.$$

Or, le terme Π_i correspond exactement à $P_t!$. •

1.5 Exemple de nombres non-décomposables

On ne peut pas décomposer $14!$ car :

$$14! = 13! \times 14 \quad \text{et} \quad 14 = 7 \times 2$$

et avec seulement qu'un seul 7 et un seul 2, on ne peut pas reconstituer une factorielle (sauf bien entendu $2!$). Cela donnerait au final :

$$14! = 13! \times 2! \times 7$$

De même pour :

$$15! = 13! \times 14 \times 15 = 13! \times 7 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Avec les facteurs 2 et 3, on pourrait reconstituer le $3!$ mais il resterait 5 et 7.

1.6 Résidus de DFFP

Définition 1.3 Soit n un nombre entier naturel ≥ 2. S'il existe deux suites $(\alpha_k)_{1\leq k\leq s}$ et $(\beta_k)_{1\leq k\leq t}$ tel que :

$$n = \prod_{1\leq k\leq s} \alpha_k! \times \prod_{1\leq k\leq t} \beta_k$$

alors on appelle *résidu du développement en facteurs factoriels premiers* le nombre :

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{DFFP}}(n) = \prod_{1\leq k\leq t} \beta_k.$$

Tout de suite, voici une première constatation :

Propriété 1.2 Si p est un nombre premier alors $\mathrm{Res}_{\mathrm{DFFP}}(p) = 1$.

La propriété découle du théorème 1.3. On pourrait maintenant essayer de décomposer les 50 premiers factoriels en facteurs de factoriels premiers.

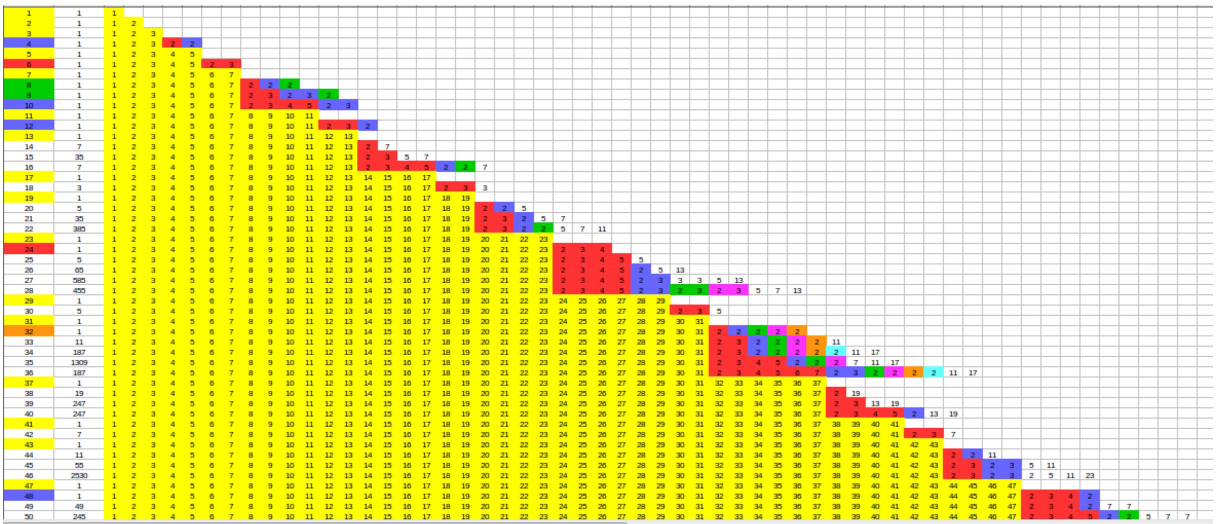

FIGURE 1 – Décomposition des 50 premiers factoriels en facteurs factoriels premiers (en couleur) et calcul des residus

On remarque, qu'après 13, il existe peu de nombres décomposable en facteurs factoriels premiers :

$$24 \ ; \ 32 \ ; \ 48.$$

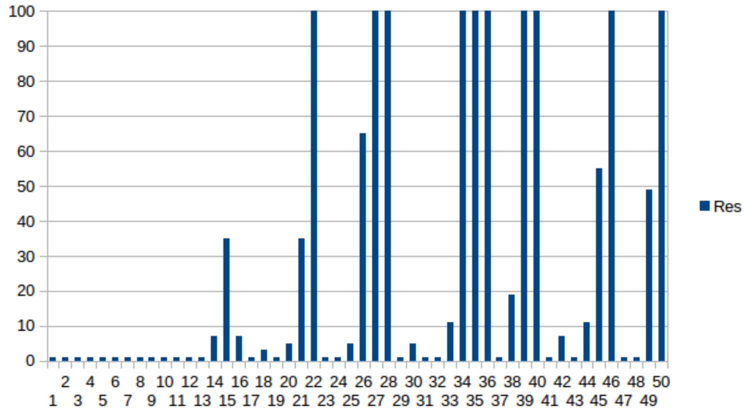

FIGURE 2 – Graphe montrant l'évolution des résidus pour les 50 premiers nombre entiers.

Décomposons en facteurs premiers les trois nombres cités précédemment :

$$24 = 6 \times 4 = 2 \times 3 \times 4 = 4!$$
$$32 = 2^5 = 2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!$$
$$48 = 2 \times 24 = 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 2! \times 4!$$

et puis, si on considère $E = \{24, 32, 48\}$ et $p \in E$, on remarque que $p - 1$ est un nombre premier.

On peut donc faire la proposition suivante :

Proposition 1.3 Soit p un nombre premier. Si $p+1$ se décompose comme :

$$p + 1 = \prod_{i=1}^{k} \alpha_k!$$

(avec (α_k) une suite d'entiers) alors $p+1$ est décomposable en facteurs factoriels premiers.

J'arrête mes recherches ici !

2 Un autre problème sur les factoriels

2.1 Le problème

Quelle est la valeur de n qui vérfie l'équation ci-dessous :

$$\frac{1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 10!}{(1!)^2(3!)^2(5!)^2(7!)^2(9!)^2} = 15 \times 2^n \quad ?$$

2.2 Solution

Tout d'abord, on peut oublier le $1!$ au numérateur et au dénomateur. Ensuite, on peut décomposer le produit de fractions comme ceci :

$$\begin{aligned}\frac{2!3!}{(3!)^2} \times \frac{4!5!}{(5!)^2} \times \frac{6!7!}{(7!)^2} \times \frac{8!9!}{(9!)^2} \times 10! &= \frac{2!}{3!} \times \frac{3!}{3!} \times \frac{4!}{5!} \times \frac{5!}{5!} \times \frac{6!}{7!} \times \frac{7!}{7!} \times \frac{8!}{9!} \times \frac{9!}{9!} \times 10! \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{5} \times 1 \times \frac{1}{7} \times 1 \times 19 \times 10! \\ &= \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{3 \times 5 \times 7 \times 9} = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \\ &= 2 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 2^3 \times 5 \times 2 = 2^8 \times 3 \times 5.\end{aligned}$$

Ainsi, $n = 8$ vérifie l'équation de départ.