FACTORISATION D'UNE SOMME DE LAMBERT À DEUX TERMES

Clément Boulonne

5 avril 2014

A Séries de Lambert

Définition A.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle *série de Lambert* générée à partir de la suite (a_n), la série suivante :

$$\mathrm{LG}(a_n;x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

B Sommes de Lambert à deux termes

B.1 Cas général

Soit $\mathrm{A} = (0,a_0,a_1) \in \mathbb{R}^3$ un couple de réels. On note :

$$\mathrm{LG}(\mathrm{A};x) = \sum_{k=0}^{1} a_k \frac{x^{k+1}}{1-x^{k+1}}$$

ou en forme développée :

$$\mathrm{LG}(\mathrm{A};x) = a_0\frac{x}{1-x} + a_1\frac{x^2}{1-x^2}.$$

On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\mathrm{LG}(\mathrm{A};x) &= \frac{a_0x(1-x^2)+a_1x^2(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{a_0x - a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x^3}{(1-x)(1-x^2)} \\ &= \frac{-(a_0+a_1)x^3 + a_1x^2 + a_0x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x(-(a_0+a_1)x^2 + a_1x + a_0)}{(1-x)(1-x^2)}\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\mathrm{LG}(\mathrm{A};x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}(-(a_0+a_1)x^2 + a_1x + a_0) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)}(-(a_0+a_1)x^2 + a_1x + a_0).$$

Notons $\mathrm{P}(x) = -(a_0+a_1)x^2 + a_1x + a_0$. Pour factoriser ce polynôme, on doit chercher ses racines par la méthode du discriminant.

$$\Delta_{\mathrm{P}} = a_1^2 + 4(a_0+a_1)a_0 = a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1.$$

Maintenant, si $\Delta_{\mathrm{P}} \geq 0$ (c'est le cas forcément si a_0 et a_1 sont du même, c'est-à-dire $a_0a_1 \geq 0$), on peut former la racine carrée de Δ_{P} :

$$\sqrt{\Delta_{\mathrm{P}}} = \sqrt{a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1}$$

et ainsi trouver les racines du polynôme P :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1}}{-2(a_0 + a_1)} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1}}{2(a_0 + a_1)} \\
x_2 &= \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1}}{-2(a_0 + a_1)} = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_0^2 + 4a_0a_1}}{2(a_0 + a_1)}
\end{aligned}
$$

On obtient donc une factorisation de $\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x)$:

$$
\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x) = \frac{x\left(x - \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2+4a_0^2+4a_0a_1}}{2(a_0+a_1)}\right)\left(x - \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2+4a_0^2+4a_0a_1}}{2(a_0+a_1)}\right)}{(1-x)^2(1+x)}.
$$

B.2 Un exemple numérique

Prenons $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$. Le fait que a_0 et a_1 soit de même signe nous assure de la positivité de Δ_{P}. On pourra donc factoriser pleinement l'expression $\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x) &= \frac{x}{1-x} + 2\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x(1-x^2) + a_1x^2(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} \\
&= \frac{-3x^3 + 2x^2 + x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)}(-3x^2 + 2x + 1)
\end{aligned}
$$

Posons $\mathrm{P}(x) = -3x^2 + 2x + 1$. On calcule :

$$
\Delta_{\mathrm{P}} = 2^2 - 4 \times -3 \times 1 = 4 + 12 = 16
$$

ainsi :

$$
\sqrt{\Delta_{\mathrm{P}}} = 4.
$$

On peut donc calculer les racines « facilement » du polynôme P :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2+4}{-6} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}; \\
x_2 &= \frac{-2-4}{-6} = \frac{6}{6} = 1.
\end{aligned}
$$

On peut pleinement factoriser l'expression $\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x))$:

$$
\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x) = \frac{x(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(1-x)^2(1+x)}
$$

En remarquant que $1 - x = -(-1 + x) = -(x - 1)$:

$$
\mathrm{LG}(\mathrm{A}; x) = \frac{x(x+\frac{1}{3})(x-1)}{-(x-1)^2(1+x)} = -\frac{x(x+\frac{1}{3})}{(x-1)(1+x)}.
$$