PLACER 1 € À LA BANQUE

Clément Boulonne

5 février 2014

Résumé

À l'age de 15 ans, j'ai trouvé une pièce d'un euro par terre, en marchant dans une rue. J'ai décidé de le placer à la banque sur un compte épargne avec un taux périodique P de $t\%$. Combien je pourrais récupérer à l'âge de ma retraite (c'est-à-dire quand j'aurai 65 ans) ?

A Préliminaires

Définition A.1 (Suites)**.** Une *suite* rélle u est une application de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On notera u_n le terme de rang n et ainsi on pourra noter la suite u comme suit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comment fonctionne un compte épargne ? On place un capital C_0 avec un taux périodique P (disons annuel) de $t\%$. Cela veut dire qu'à chaque début d'année $n+1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), le capital C_n (capital à l'année n) est augmenté de $t\%$.

Définition A.2 (Augmenter et diminuer une quantité par un pourcentage)**.** Une quantité Q est augmentée (respectivement diminuée) de $t\%$ quand on multiplie cette quantité par $(1 + \frac{t}{100})$ (respectivement $(1 - \frac{t}{100})$).

Ainsi, au début de l'année $n+1$, notre nouveau capital C_{n+1} sera de :

$$\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_n \left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

Définition A.3 (Suites géométriques)**.** Une suite rélle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* si, $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = qu_n$$

u_0 est appelé le terme initial de la suite (u_n) et q est appelé la *raison* de la suite.

La suite $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *géométrique* de premier terme C_0 et de raison $1+\frac{t}{100}$ (qu'on appelle *capital initial*).

Dans cet article, on déterminera le capital du compte épargne à l'annuité n (c'est-à-dire le calcul du capital C_n au début de la période n) sachant que $\mathrm{C}_0 = 1$ €, les variables P et t seront fixées.

Dans la suite de cet article, on notera $\varepsilon := \frac{t}{100}$ avec $0 < \varepsilon < 1$ (car $0 < t < 100$). Une année comportera 365 jours, 52 semaines, 12 mois. Dans un jour, il y a 24 heures. Dans une heure, il y a 60 minutes et dans une minute, il y a 60 secondes.

B Compte épargne à taux constant

Nous décidons de placer notre euro trouvé dans la rue sur un compte épargne. Quatre banques nous proposent d'en ouvrir un :

Banque 1 (B_1) **:** Compte épargne à un taux hebdomadaire de $t_1 = 0{,}1\%$.

Banque 2 (B_2) **:** Compte épargne à un taux annuel de $t_2 = 10\%$.

Banque 3 (B_3) **:** Compte épargne à un taux trimestriel de $t_3 = 1\%$.

Banque 4 (B_4) **:** Compte épargne à un taux semestriel de $t_4 = 3{,}5\%$.

La question qui nous vient immédiatement à l'esprit est : « Quelle est la banque qui propose le compte épargne le plus avantageux ? ». Calculons le nombre N_i d'annuités de chaque banque B_i :

Banque 1 : $50 \times 52 = 2600$ semaines dans 50 ans donc $\mathrm{N}_1 = 2600$ annuités.

Banque 2 : 50 ans donc $\mathrm{N}_2 = 50$ annuités.

Banque 3 : $3 \times 50 = 150$ trimestres dans 50 ans donc $\mathrm{N}_3 = 150$ annuités.

Banque 4 : $2 \times 50 = 100$ semestres dans 50 ans échances donc $\mathrm{N}_4 = 100$ annuités.

On veut connaître l'évolution de notre capital au cours du temps. Il faudra donc définir quatre suites $(\mathrm{C}_{n,i})_{0 \leq n \leq \mathrm{N}_i}$ avec $1 \leq i \leq 4$ qui définissent l'évolution du capital placé dans le compte épargne de la banque B_i. Nous avons vu dans la section précédente que chaque suite $(\mathrm{C}_{n,i})$ sont géométriques de raison $(1 + \varepsilon_i)$. Calculons ε_i pour $1 \leq i \leq 4$:

$$\varepsilon_1 = \frac{t_1}{100} = \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001, \quad \varepsilon_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{100} = 0{,}01, \quad \varepsilon_4 = \frac{3{,}5}{100} = 0{,}035.$$

Maintenant, passons aux définitions des suites $(\mathrm{C}_{n,i})_{0 \leq n \leq \mathrm{N}_i}$ avec $1 \leq i \leq 4$ de manière récurrente [1]

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{0,1} = 1 \\ \mathrm{C}_{n+1,1} = 1{,}001 \times \mathrm{C}_{n,1}, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{0,2} = 1 \\ \mathrm{C}_{n+1,2} = 1{,}1 \times \mathrm{C}_{n,2}, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{0,3} = 1 \\ \mathrm{C}_{n+1,3} = 1{,}01 \times \mathrm{C}_{n,3}, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{0,4} = 1 \\ \mathrm{C}_{n+1,4} = 1{,}0035 \times \mathrm{C}_{n,4}, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ces définitions de suites sont un peu contraignantes car pour calculer le terme de rang n (n assez élevé), il faut calculer tous les termes de rang j ($1 \leq j \leq n$). Il faut remarquer quelque chose. Prenons par exemple la suite $(\mathrm{C}_{n,1})_{0 \leq n \leq \mathrm{N}_1}$ (ce sera la même chose pour les autres suites) :

$$\mathrm{C}_{1,1} = 1{,}001$$
$$\mathrm{C}_{1,2} = 1{,}001 \mathrm{C}_{1,1} = 1{,}001 \times 1{,}001 = (1{,}001)^2$$
$$\mathrm{C}_{1,3} = 1{,}001 \mathrm{C}_{1,2} = 1{,}001 \times (1{,}001)^2 = (1{,}001)^3$$

1. Il existe deux manières de décrire chaque terme d'une suite :
   - explicite : $u_n = f(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - par récurrence : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n), \ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

et de proche en proche :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{C}_{n,1} = (1{,}001)^n.$$

Plus généralement,

Propriété B.1. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de terme initial* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et de raison* $q \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0.$$

Fort de cette propriété, on peut construire un graphique qui permet de visualiser les premiers termes de la suite et l'évolution du capital dans les comptes épargne de chaque banque.

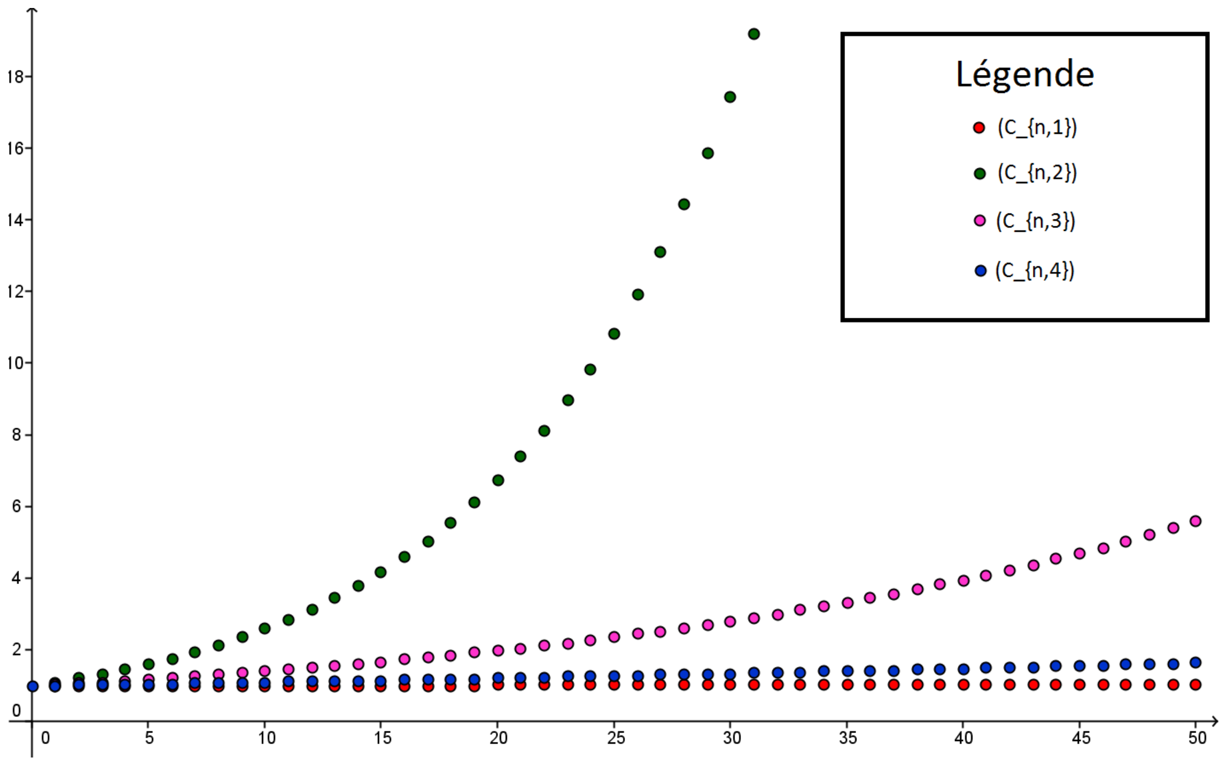

FIGURE 1 – Représentation des 50 premiers termes $\mathrm{C}_{n,i}$

Qu'est ce que l'on remarque sur la figure 1 ? Tout d'abord, le choix des unités est assez judicieux car si l'axe des ordonnées aurait été plus grand, les points représentant les premiers termes des suites $(\mathrm{C}_{n,1})$ et $(\mathrm{C}_{n,4})$ seraient confondus. Ainsi, on ne peut pas visualiser les 20 derniers termes de la suite $(\mathrm{C}_{n,2})$.

On remarque aussi une lente évolution du capital $(\mathrm{C}_{n,1})$ et $(\mathrm{C}_{n,4})$. Mais comme il y a beaucoup plus d'annuités, on a « le temps de voir… ».

Après avoir quelques remarques, répondons à notre question crucial : « Combien vais-je avoir à la fin des 50 années d'épargne dans chaque compte ? ». Calculons donc :

(B_1) **:** $\mathrm{C}_{2600,1} = (1{,}001)^{2600} \simeq 13{,}45$ €.

(B_2) **:** $\mathrm{C}_{50,2} = (1{,}1)^{50} \simeq 117{,}39$ €.

(B_3) **:** $\mathrm{C}_{150,3} = (1{,}001)^{150} \simeq 4{,}45$ €.

(B_4) **:** $\mathrm{C}_{100,4} = (1{,}035)^{100} \simeq 31.19$ €.

Conclusion : le compte épargne de la banque n° 2 est plus avantageux car il nous rapportera à peu près 117,39 € (arrondi à 10^{-2} près).

Remarque B.2. Avec un euro placé en banque, on peut espérer récupérer au moins 117 fois le montant de son capital initial.

C Détermination du taux

Supposons que les quatre banques veulent proposer un compte-épargne dont les caractéristiques sont les suivantes :

(B_1) : L'épargnant dépose 1 €, le compte épargne a un taux hebdomadaire de τ_1%. Au bout de 50 ans d'épargne, l'épargnant peut récupérer 20 €.

(B_2) : L'épargnant dépose 1 €, le compte épargne a un taux annuel de τ_2%. Au bout de 50 ans d'épargne, l'épargnant peut récupérer 150 €.

(B_3) : L'épargnant dépose 1 €, le compte épargne a un taux trimestriel de τ_3%. Au bout de 50 ans d'épargne, l'épargnant peut récupérer 7 €.

(B_4) : L'épargnant dépose 1 €, le compte épargne a un taux semestriel de τ_4%. Au bout de 50 ans d'épargne, l'épargnant peut récupérer 35 €.

Notre but est de déterminer les taux τ_i $(1 \leq i \leq 4)$ des comptes épargne. Nous avons déjà déterminé le nombre total d'annuités N_i $(1 \leq i \leq 4)$, on ne rappelle que les valeurs :

$$\mathrm{N}_1 = 2600 \ ; \ \mathrm{N}_2 = 50 \ ; \ \mathrm{N}_3 = 150 \ ; \ \mathrm{N}_4 = 100.$$

Pour déterminer les taux τ_i, nous allons utiliser la formule suivante :

Propriété C.1. *Soit* $(\mathrm{C}_n)_{0 \leq n \leq \mathrm{N}}$ *la suite des capitaux du compte-épargne à taux périodique* τ% *au bout de la* n^e *annuité et avec* N *le nombre d'annuités total. Si* $\mathrm{C}_0 \neq 0$*, on a alors :*

$$\tau = 100 \left[\left(\frac{\mathrm{C_N}}{\mathrm{C}_0} \right)^{1/\mathrm{N}} - 1 \right].$$

Démonstration. D'après la propriété B.1, pour tout $0 \leq n \leq \mathrm{N}$, on a :

$$\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_0 \left(1 + \frac{\tau}{100}\right)^n.$$

En particulier, pour $n = \mathrm{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C_N} = \mathrm{C}_0 \left(1 + \frac{\tau}{100}\right)^{\mathrm{N}} &\overset{\mathrm{C}_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{C_N}}{\mathrm{C}_0} = \left(1 + \frac{\tau}{100}\right)^{\mathrm{N}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{C_N}}{\mathrm{C}_0}\right)^{1/\mathrm{N}} = 1 + \frac{\tau}{100} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{C_N}}{\mathrm{C}_0}\right)^{1/\mathrm{N}} - 1 = \frac{\tau}{100} \\ &\Leftrightarrow 100 \left[\left(\frac{\mathrm{C_N}}{\mathrm{C}_0}\right)^{1/\mathrm{N}} - 1\right] = \tau \end{aligned}$$

□

On connait :

(B_1) : $\mathrm{C}_{0,1} = 1$; $\mathrm{N}_1 = 2600$; $\mathrm{C}_{2600,1} = 20$.

(B_2) : $\mathrm{C}_{0,2} = 1$; $\mathrm{N}_2 = 50$; $\mathrm{C}_{50,2} = 150$.

(B_3) : $\mathrm{C}_{0,3} = 1$; $\mathrm{N}_3 = 150$; $\mathrm{C}_{150,3} = 7$.

(B_4) : $\mathrm{C}_{0,4} = 1$; $\mathrm{N}_4 = 100$; $\mathrm{C}_{100,4} = 35$.

on peut calculer les taux τ_i des comptes éparges de chaque banque grâce à la formule de la propriété C.1 :

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= 100[(20)^{1/2600} - 1] \simeq 0{,}11 \,; \\
\tau_2 &= 100[(150)^{1/50} - 1] \simeq 10{,}54 \,; \\
\tau_3 &= 100[(7)^{1/150} - 1] \simeq 1{,}31 \,; \\
\tau_4 &= 100[(35)^{1/100} - 1] \simeq 3{,}62.
\end{aligned}$$

(arrondi à 10^{-2} près)

Conclusion :

- Pour que l'épargnant récupère 20 € au bout de 2600 semaines, il faut que le banque n° 1 applique un taux de 0,11% à son compte épargne.
- Pour que l'épargnant récupère 150 € au bout de 50 années, il faut que le banque n° 2 applique un taux de 10,54% à son compte épargne.
- Pour que l'épargnant récupère 7 € au bout de 150 trimestres, il faut que le banque n° 3 applique un taux de 1,31% à son compte épargne.
- Pour que l'épargnant récupère 35 € au bout de 100 semestres, il faut que le banque n° 4 applique un taux de 3,62% à son compte épargne.

Remarque C.2. On remarque que les taux appliqués en section C sont plus important que celle de la section B : les capitaux finaux demandés en section C sont plus important que demandés dans la section B. La croissance de la fonction $t \mapsto (1+t)^n$ avec $t > 0$ explique cela.

D Tableau pour le banquier

Le tableau 1 permet au banquier de connaître d'avance le capital final s'il décide de proposer à ses clients un compte-épargne avec un capital initial de 1 €, d'un taux périodique P de t%.

Le nombre N correspond au nombre total d'annuités, il est calculé dans le tableau.

Il est intéressant au banquier de proposer un compte épargne à ses clients qui rapporte un capital final compris entre 100 € et 100000 €, les cases correspondants à ces comptes épargne sont surlignées en jaune.

Un compte épargne qui rapporte plus que 100000 € est certes, très intéressant pour le client mais très coûteux pour le banquier, les cases correspondants à comptes épargne sont surlignées en rouge.

Finalement, les cases blanches correspondent à des comptes épargne rapportant au client une somme inférieure à 100 €. Le client estime que ce n'est pas intéressant de miser sur ce genre de comptes épargne.

P	N / t ->	0,1	0,5	1	2	3	5	7	10	15	20	25
Annuel	50	1,05	1,28	1,64	2,69	4,38	11,47	29,46	117,39	1083,66	9100,44	70064,92
Semestriel	100	1,11	1,65	2,70	7,24	19,22	131,50	867,72	13780,61			
Trimestriel	150	1,16	2,11	4,45	19,50	84,25	1507,98	25560,34				
Mensuel	600	1,82	19,94	391,58								
Hebdomadaire	2600	13,45										

(rouge)	>100000 inintéressant pour le banquier
(jaune)	>100 et <100000 intéressant pour l'épargnant, tolérable pour le banquier

TABLE 1 – Tableau des capitaux finaux pour des comptes épargne à taux périodique P de t%

E Courte annuité, taux continu

Dans le tableau 1, on remarque que pour l'annuité de type hebdomadaire, pour un taux supérieur à 0,5%, le capital final est supérieur à 100000 €. On va considérer un compte-épargne de capital initial d'un euro, d'un taux hebdomadaire t_{H}% et qui donne une capital final au bout de 50 ans (2600 annuités) de 100000 €. On va calculer t_{H} grâce à la formule de la propriété C.1 :

$$t_{\mathrm{H}} = 100\left[(100000)^{1/2600} - 1\right] \simeq 0{,}44\%$$

« Raccourcissons » les annuités et considérons des annuités de type quotidien, heures, minutes et secondes. Il y a

– $\mathrm{N_J} := 18250$ jours ;
– $\mathrm{N}_h := 438000$ heures ;
– $\mathrm{N}_m := 2628000$ minutes ;
– $\mathrm{N}_s := 1576800000$ secondes

dans 50 ans.

On va considérer une banque qui propose plusieurs comptes-épargne de capital initial d'un euro, d'un taux

– quotidien de t_{J}%
– par heure de t_h%
– par minute de t_m%
– par seconde de t_s%

et d'un capital final au bout de 50 ans de 100000 €. Le but est de calculer t_{J}, t_h, t_m et t_s. On utilise pour cela (encore et toujours) la formule de la propriété C.1 :

$$\begin{aligned}
t_{\mathrm{J}} &= 100\left[(100000)^{1/\mathrm{N_J}} - 1\right] = 100\left[(100000)^{1/18250} - 1\right] \simeq 0{,}0631\% \\
t_h &= 100\left[(100000)^{1/\mathrm{N}_h} - 1\right] = 100\left[(100000)^{1/438000} - 1\right] \simeq 0{,}00263\% \\
t_m &= 100\left[(100000)^{1/\mathrm{N}_m} - 1\right] = 100\left[(100000)^{1/2628000} - 1\right] \simeq (4{,}38 \times 10^{-4})\% \\
t_s &= 100\left[(100000)^{1/\mathrm{N}_s} - 1\right] = 100\left[(100000)^{1/1576800000} - 1\right] \simeq (7{,}30 \times 10^{-7})\%
\end{aligned}$$

Conclusion :

Plus le nombre d'annuités sur 50 ans est grande, plus le taux t à appliquer pour arriver à un capital final fixé est petit.

F Taux maximal

On a supposé dans les préliminaires de l'article que $0 < t < 100$. Que se passe-t-il quand t tend vers 100, c'est-à-dire quand t prend des valeurs proches de 100 sans jamais être égal ?

Pour canaliser la question, on va supposer que la banque propose un compte-épargne de capital initial d'un euro, d'un taux annuel de t% et dont l'épargne pourra récupérer 100000 € au bout de N_t années.

On doit alors déterminer le nombre N_t. Avant de donner la formule permettant le calcul de N_t, on donne une autre définition de la puissance d'un nombre [2] :

Définition F.1 (Exponentielle de base a)**.** Soit a un réel strictement positif. On appelle fonction *exponentielle de base* a, la fonction f_a (ou bien $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)} = a^x.$$

2. On suppose connu la définition et les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

On a alors la propriété suivante :

Propriété F.2. *Soit* $(\mathrm{C}_n)_{0\leq n\leq \mathrm{N}}$ *la suite des capitaux du compte-épargne à taux périodique* $t\%$ *au bout de la* n^e *annuité et avec* N *le nombre d'annuités total. On note* $\varepsilon = \frac{t}{100}$. *Si* $\varepsilon > 0$, *on a alors :*

$$\mathrm{N} = \left\lceil \frac{\ln(\mathrm{C_N})}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rceil.$$

où $\lceil x \rceil$ *désigne l'entier supérieur le plus proche de* x.

Démonstration. Pour tout $0 \leq n \leq \mathrm{N}$,

$$\mathrm{C}_n = (1+\varepsilon)^n.$$

En particulier, pour $n = \mathrm{N}$,

$$\mathrm{C_N} = (1+\varepsilon)^{\mathrm{N}}.$$

On connait $\mathrm{C_N}$ et ε, il faut déterminer N.

$$\begin{aligned} \mathrm{C_N} = (1+\tau)^{\mathrm{N}} &\Leftrightarrow \mathrm{C_N} = \exp(\mathrm{N}\ln(1+\varepsilon)) \\ &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{C}_n) = \mathrm{N}\ln(1+\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{N} = \frac{\ln(\mathrm{C}_n)}{\ln(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

(bien entendu, la dernière équivalence est sous condition que $\ln(1+\varepsilon) \neq 0$, c'est-à-dire que $1+\varepsilon \neq 1$ ou encore que $\varepsilon \neq 0$.) Comme le nombre d'annuités est un nombre entier, on choisira l'entier supérieur le plus proche de $\frac{\ln(\mathrm{C}_n)}{\ln(1+\varepsilon)}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{N} = \left\lceil \frac{\ln(\mathrm{C_N})}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rceil.$$

□

On va calculer le nombre d'annuités N_t pour que le compte-épargne d'un taux annuel $t\%$ donne une capital supérieur de 100000 euros.

F.1 Cas $t = 90$

$$\mathrm{N}_{90} = \left\lceil \frac{\ln(100000)}{\ln(1{,}9)} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{11{,}51}{0.64} \right\rceil \approx 18$$

Il faut donc 18 ans pour que le compte-épargne à taux annuel de $t = 90\%$ donne un capital supérieur à 100000.

F.2 Cas $t = 99$

$$\mathrm{N}_{90} = \left\lceil \frac{\ln(100000)}{\ln(1{,}99)} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{11{,}51}{0.69} \right\rceil \approx 17.$$

Il faut donc 17 ans pour que le compte-épargne à taux annuel de $t = 99\%$ donne un capital supérieur à 100000.

F.3 Cas $t = 99{,}9$ et $t = 99{,}99$

$$\begin{aligned} N_{99,9} &= \left\lceil \frac{\ln(100000)}{\ln(1{,}999)} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{11{,}51}{0.69} \right\rceil \approx 17 = N_{99}. \\ N_{99,99} &= \left\lceil \frac{\ln(100000)}{\ln(1{,}9999} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{11{,}51}{0.69} \right\rceil \approx 17 = N_{99,9} = N_{99}. \end{aligned}$$

Il faut donc 17 ans pour que le compte-épargne à taux annuel $t = 99{,}9\%$ et $t = 99{,}99\%$ donne un capital supérieur à 100000.

F.4 Cas limite

La section précédente nous montre que plus on se rapproche de $t = 100$, le nombre d'annuités nécessaire pour obtenir 100000 € est de 17. Quand t se rapproche de 100, $1 + \frac{t}{100}$ se rapproche de 2. Il faut donc résoudre l'équation en N :

$$\begin{aligned} 2^{N} > 100000 \Leftrightarrow \exp(N \ln 2) > 100000 \Leftrightarrow N \ln 2 > \ln(100000) \\ \Leftrightarrow N > \frac{\ln(100000)}{\ln(2)} \Leftrightarrow N > \left\lceil \frac{11{,}51}{0.6931} \right\rceil \Leftrightarrow N > 17. \end{aligned}$$

D'où notre intuition de départ.

F.5 Remarque finale pour la banque

Nous avons dit, dans la section D, que le compte-épargne est intéressant à la banque si le capital récupéré est inférieur strictement à 100000 euros. Ainsi, il faut revoir le nombre d'annuités à la baisse et considérer plutôt $N_t - 1$.

D'où le nombre d'annuités préférable pour la banque serait de :

- $N_{90} = 17$;
- $N_{99} = N_{99,9} = N_{99,99} = 16$.

et le capital final pour chaque compte-épargne est :

- pour un taux $t = 90\%$, $C_{17} \approx 54803{,}87$ € ;
- pour un taux $t = 99\%$, $C_{16} \approx 60485{,}21$ € ;
- pour un taux $t = 99{,}9\%$, $C_{16} \approx 65013.67$ € ;
- pour un taux $t = 99{,}99\%$, $C_{16} \approx 65483{,}59$ € ;
- pour un taux $t \to 100\%$, $C_{16} \to 65536$ €.