UN PROBLÈME DE MINIMISATION

Clément Boulonne

30 octobre 2013

1 L'énoncé

Trouver $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la quantité :

$$(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \tag{1}$$

soit minimale.

2 Développement de l'expression

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On va tout d'abord développer l'expression (1). Deux méthodes :

1.
$$\begin{aligned}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &= (x+y)\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ &= \frac{1}{xy}(x+y)^2 = \frac{1}{xy}(x^2+2xy+y^2) = 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &= 1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1 \\ &= 2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

3 Etude d'une fonction à une variable

Nous allons réduire l'énoncé en l'étude d'une fonction à une variable. Comme $x > 0$ et $y > 0$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \alpha x$. On remplace dans le développement trouvé la valeur de y en fonction de x.

$$2+\frac{\alpha x}{x}+\frac{x}{\alpha x} = 2+\alpha+\frac{1}{\alpha}.$$

ou encore :

$$2+\alpha+\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha} = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}.$$

On a donc à étudier la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \end{array}.$$

Calculons la fonction dérivée de la fonction f :

$$f'(\alpha) = \frac{2(\alpha+1)\alpha-(\alpha+1)^2}{\alpha^2} = \frac{(\alpha+1)(2\alpha-[\alpha+1])}{\alpha^2} = \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

En remarquant l'identité remarquable $(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^2-1$, on obtient :

$$f'(\alpha)=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}=1-\frac{1}{\alpha^2}.$$

La dérivée s'annule en $\alpha=1$, elle est négative quand $\alpha<1$ et positive quand $\alpha>1$.

4 Conclusion

La fonction f est minimale quand $\alpha=1$. Ainsi la quantité (1) est minimale quand $x=y$ donc :

$$(x+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=2+\frac{x}{x}+\frac{x}{x}=2+1+1=4.$$

5 Généralisation

Soient $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$. Minimiser la quantité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right).$$