Polynômes en φ, nombre d'or

Clément Boulonne

13 mai 2013

Résumé

Classiquement, prenons un polynôme en le nombre d'or φ. Comme $\varphi^2 = \varphi + 1$, il est possible de demander au système de transformer, récursivement, toutes les puissances de φ en un polynôme du premier degré en φ. Ainsi, tout polynôme en φ deviendra une expression du type $a\varphi+b$ par application d'une seule transformation, avec a et b deux constantes indépendantes de φ. Par exemple, $\varphi^{15} - 377$ devient 610φ, ce qui n'est pas évident à repérer au premier coup d'œil.

J.-J. Dupas, *Plaidoyer pour le calcul formel*, Tangente Éducation n° 24, Avril 2013.

1 Le nombre d'or

Le nombre d'or en question est noté φ et vaut :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

2 Démonstration de l'égalité $\varphi^2 = \varphi - 1$

On part de l'expression :

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

De plus, on a :

$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

D'où, l'égalité $\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1}$.

3 Une autre formule : sur l'inverse du nombre d'or

Partons de l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \iff \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Comme $\varphi \neq 0$, on peut diviser par φ de chaque côté de l'égalité :

$$\iff \frac{\varphi^2 - \varphi - 1}{\varphi} = 0 \iff \varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0 \iff \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.$$

4 Démonstration par récurrence

On va démontrer pour tout $n \geq 0$, la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\exists a, b \in \mathbb{N},\ \varphi^n = a\varphi + b.\text{"}$$

La démonstration se fait par récurrence sur n.

Initialisation Pour $n = 0$, $\varphi^0 = 1$ donc $a = 0$ et $b = 1$.

Hérédité Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ a été démontré pour un certain rang $n \geq 0$. Montrons la propriété au rang suivant, c'est-à-dire montrons $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n \times \varphi.$$

Utilisons l'hypothèse de récurrnce qui nous dit qu'il existe deux entiers a, b tels que $\varphi^n = a\varphi + b$.

$$\varphi^{n+1} = (a\varphi + b)\varphi = a\varphi^2 + b\varphi = a(\varphi + 1) + b\varphi = (a + b)\varphi + a.$$

Si o note $\alpha = a + b \in \mathbb{N}$ et $\beta = a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi^{n+1} = \alpha\varphi + \beta.$$

D'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie .

Par principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$, il existe deux entiers a et b tels que $\varphi^n = a\varphi + b$.

Donc, pour tout polynôme P de φ à coef réels (on note cet ensemble $\mathbb{R}[\varphi]$), il existent deux réels a et b tels que

$$\mathrm{P}(\varphi) = a\varphi + b.$$

La formule montrée à la section précédente permet d'étendre le résultat démontrée dans ce paragraphe aux expressions de la forme :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi^n = a\varphi + b.$$

5 Puissances successives de φ

La formule précédente $\varphi^2 = \varphi + 1$ va nous permettre de calculer les puissances successives de φ :

$$\begin{aligned}
&\varphi^3 = \varphi^2\varphi = (\varphi + 1)\varphi = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1\\
&\varphi^4 = (\varphi^2)^2 = (\varphi + 1)^2 = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = (\varphi + 1) + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2\\
&\varphi^5 = \varphi^3\varphi^2 = (2\varphi + 1)(\varphi + 1) = 2\varphi^2 + 2\varphi + \varphi + 1 = 2(\varphi + 1) + 3\varphi + 1 = 5\varphi + 3\\
&\varphi^6 = (\varphi^3)^2 = (2\varphi + 1)(2\varphi + 1) = 4\varphi^2 + 4\varphi + 1 = 4(\varphi + 1) + 4\varphi + 1 = 8\varphi + 5\\
&\varphi^7 = \varphi^3\varphi^4 = (2\varphi + 1)(3\varphi + 2) = 6\varphi^2 + 7\varphi + 1 = 6(\varphi + 1) + 7\varphi + 1 = 13\varphi + 8
\end{aligned}$$

Que remarque-t-on ? Si on note $(\mathrm{F}_n)_n$ la suite de Fibonacci :

$$\mathrm{F}_0 = 1,\ \mathrm{F}_1 = 1,\ \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n,\ \forall n \geq 0,$$

on remarque que :

$$\varphi^0 = \mathrm{F}_0,\ \ \varphi^n = \mathrm{F}_n\varphi + \mathrm{F}_{n-1},\ \forall n \geq 1.$$

6 Calcul de $\varphi^{15} - 377$

On calcule tout d'abord φ^{15} grâce au calcul de quelques puissances succesives de φ à la section précédente :

$$\begin{aligned}
\varphi^{15} &= (\varphi^6)^2\varphi^3 = (8\varphi+5)^2(2\varphi+1) = (64\varphi^2+80\varphi+25)(2\varphi+1)\\
&= (64\varphi+64+80\varphi+25)(2\varphi+1) = (144\varphi+89)(2\varphi+1) = 288\varphi^2+144\varphi+178\varphi+89\\
&= 288(\varphi+1)+322\varphi+89 = 610\varphi+377.
\end{aligned}$$

et on obtient bien :

$$\boxed{\varphi^{15} - 377 = 610\varphi}.$$