M205 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

Notes de cours de Clément BOULONNE

<clembou@gmail.com>

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

L2 Mathématiques

Table des matières

CHAPITRE I

RAPPELS

La première étape de ce cours sera de démontrer le théorème suivant :

Théorème I.1. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps,* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{K})$*. On note la transposée de* A, A^{T} *(si*[(1)] $\mathbf{K} = \mathbf{R}$*). Alors* $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Mais avant de commencer à travailler, on n'échappe pas à quelques rappels d'algèbre linéaire.

I.1 Théorème de la base incomplète

Théorème I.2 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soient* $\mathrm{I}, \mathrm{J} \subset \mathbf{N}$ *deux ensembles d'indices,* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *un système libre de vecteurs d'un espace vectoriel* V *et* $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *un système générateur de* V *alors il existe* $\mathrm{J}' \subset \mathrm{J}$ *tel que le système* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}} \cup (f_k)_{k\in\mathrm{J}'}$ *soit une base de* V*.*

Exemple I.3. Soit $\mathrm{V} = \mathbf{R}^3$. On se fixe $e_1 = (1,1,1)$, $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,0,1)$, $f_3 = (0,0,1)$ et $f_4 = (1,2,3)$. Une base de V serait (e_1, f_1, f_2) ou encore (e_1, f_1, f_4).

Corollaire I.4. *Tout espace vectoriel admet une base. On prend, dans le théorème I.2,* $\mathrm{C} = \emptyset$*.*

Théorème I.5. *Toutes les bases d'un espace vectoriel* V *ont le même cardinal.*

I.2 Sous-espace vectoriel engendrée par une partie

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ et $\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$.

Proposition I.6. *Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Proposition I.7. *Il existe un plus petit sous-espace* V *contenant* S *qu'on note* $\langle \mathrm{S} \rangle$ *(ou* $\operatorname{Vect}(\mathrm{S})$*). Ce sous-espace admet les descriptions suivantes :*

[(1)] On verra, par la suite, comment on nomme la transposée d'une matrice quand $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

(i) $\langle \mathrm{S} \rangle = \displaystyle\bigcup_{\substack{\mathrm{W}\ \textit{sous-espace} \\ \textit{vectoriel},\ \mathrm{S}\subset\mathrm{W}}} \mathrm{W},$

(ii) $\langle \mathrm{S} \rangle = \left\{ \displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}\ \textit{finie}} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbf{K},\ v_i \in \mathrm{S} \right\}.$

I.3 Quotient d'espaces vectoriels

Soient V un **K**-espace vectoriel et $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ un sous-espace vectoriel.

Théorème I.8. *L'ensemble* V/W *est muni d'une structure de* **K***-espace vectoriel telle que la surjection canonique* $s : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{W}$ *est linéaire et vérifie pour tout* **K***-espace vectoriel* V' *et toute application linéaire* $f\mathrm{V} \to \mathrm{V}'$*, s'il existe* $\tilde{f} : \mathrm{V}/\mathrm{W} \to \mathrm{V}'$ *linéaire tel que* $\tilde{f} \circ s = f$ *alors* $\mathrm{W} \subset \mathrm{Ker}\, f$*.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "s"'] & \mathrm{V}' \\ & \mathrm{V}/\mathrm{W} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

De plus,

1. $\tilde{f}$ *est surjective* $\Rightarrow f$ *est surjective,*
2. $\tilde{f}$ *est injective* $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{W}$*.*

On peut ainsi définir une *relation d'équivalence* sur V.

Définition I.9. *Soit* $v, v' \in \mathrm{V}$*. On dit que* v *est* équivalent *à* v' *si et seulement si* $v' - v \in \mathrm{W}$*, c'est-à-dire :*

$$v, v' \in \mathrm{V}, \quad v \sim v' \iff v' - v \in \mathrm{W}.$$

On montre que la relation d'équivalence de la définition I.9 en est bien une :

Démonstration. (i) $\sim$ est reflexive : $\forall v,\ v \sim v$,

(ii) $\sim$ est symétrique : $v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$,

(iii) $\sim$ est transitive : $v \sim v'$ et $v' \sim v'' \Rightarrow v \sim v''$. Cela veut dire :

$$v' - v \in \mathrm{W} \text{ et } v'' - v' \in \mathrm{W} \Longrightarrow \underbrace{v' - v'}_{0} + v'' - v \in \mathrm{W}.$$

□

V admet une partition en classes d'équivalence, c'est-à-dire que l'ensemble des classes d'équivalence constitue une partition de V (tout élément de V appartient à un et à un seul des éléments d'une partie de V). On définit :

$$\mathrm{cl}(\mathrm{V}) = \{v' \in \mathrm{V},\ v' = v\} = \{v' \in \mathrm{V},\ v' - v \in \mathrm{W}\} = v + \mathrm{W}.$$

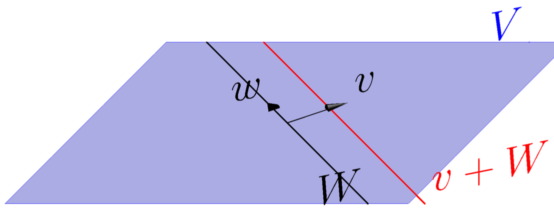

FIG. I.1 – Interprétation géométrique de l'ensemble $v + \mathrm{W}$

Ainsi, V/W est l'ensemble des classes d'équivalence.

Soit l'application

$$\begin{array}{rcccl} s & : & \mathrm{V} & \to & \mathrm{V}/\mathrm{W} \\ & & v & \mapsto & \mathrm{cl}(v) = v + \mathrm{W} \end{array}.$$

On va maintenant définir la somme et le produit scalaire d'éléments de V/W.

Définition I.10 (Somme et produit scalaire d'éléments de V/W)**.** *On définit l'addition d'éléments de* V/W *:*

$$(v + \mathrm{W}) + (v' + \mathrm{W}) = (v + v') + \mathrm{W}$$

et le produit scalaire d'éléments de V/W *:*

$$\lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda(v + \mathrm{W}) = (\lambda v) + \mathrm{W}.$$

On vérifie que cela ne dépend pas des représentants choisis.

Démonstration. On a :

$$s(v + v') = s(v) + s(v')$$

et

$$s(\lambda v) = \lambda s(v).$$

Supposons qu'il existe $\tilde{f} : \mathrm{V}/\mathrm{W} \to \mathrm{V}$ linéaire et tel que $\tilde{f} \circ s = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "s"'] & \mathrm{V}' \\ & \mathrm{V}/\mathrm{W} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$v \in \mathrm{W}, \quad f(v) = \tilde{f}(s(v)) = \tilde{f}(0_{\mathrm{V}/\mathrm{W}}) = 0_{\mathrm{V}'} \Longrightarrow v \in \mathrm{Ker}(f).$$

Réciproquement, si $\mathrm{W} \subset \mathrm{Ker}(f)$ et si $v \sim v'$, c'est-à-dire si $v - v' \in$ alors $f(v - v') = 0_{\mathrm{V}'} \Rightarrow f(v) = f(v')$. On définit $\tilde{f}(v + \mathrm{W}) = \tilde{f}(\mathrm{cl}(v)) = \tilde{f}(s(v))$. Mais $\tilde{f}(v + \mathrm{W}) = f(v)$ (cela ne dépend pas du représentant). On peut alors vérifier que $\tilde{f}$ est linéaire.

$$v \to \mathrm{cl}(v) = v + \mathrm{W}.$$

$\square$

Proposition I.11. *Soit* W *un sous-espace vectoriel de* V*, et* W_1 *un supplémentaire dans* V *tel que* $V = W \oplus W_1$*. Alors la restriction* $s|_{W_1}$ *de la surjection canonique à* W_1 *(*$W_1 \to V/W$*) est un isomorphisme.*

Démonstration. On montre que $s|_{W_1}$ est bijective. Soit $v \in W$ et soient $w \in W$ et $w_1 \in W_1$ tel que $v = w + w_1$. On a :

$$s(v) = v + W = w_1 + v + W = w_1 + W = s(w_1).$$

Donc : $s|_{W_1} : W_1 \to V/W_1$ est surjective et comme

$$\operatorname{Ker}(s|_{W_1}) = \operatorname{Ker}(s) \cap W_1 = W \cap W_1 = \{0_V\},$$

on a $s|_{W_1}$ est injective et donc bijective. $\square$

CHAPITRE II

DUALITÉ

II.1 Ensemble des applications linéaires

Définition II.1 (Ensemble des applications linéaires)**.** *Soient* U *et* V *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. On note* $\mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$*, l'ensemble des applications linéaires de* U *dans* V*. On sait alors que* $\mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ *a une structure de* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*

1. $\forall f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$,
2. $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.

Remarque II.2. On peut donner une interprétation matricielle à la II.1. Soit $(e_j)_{j\in\mathrm{J}}$ une base de U et $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base de V. Alors :

$$f(e_j) = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_{ij} f_i.$$

Soit la matrice représentant f dans les bases choisies :

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{i\in\mathrm{I},\ j\in\mathrm{J}},$$

où i est l'indice de ligne et j, l'indice de colonne. Maintenant, si on considère $\mathrm{B} = (b_{ij})_{i\in\mathrm{I}, j\in\mathrm{J}}$ alors $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C} = (c_{ij})_{i\in\mathrm{I}, j\in\mathrm{J}}$ avec :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

et pour $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\lambda \mathrm{A} = (\lambda a_{ij})_{i\in\mathrm{I}, j\in\mathrm{J}}.$$

On a aussi $\mathrm{mat}(f+g) = \mathrm{mat}(f) + \mathrm{mat}(g)$ et $\mathrm{mat}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{mat}(f)$.

II.2 Espace dual

Proposition II.3. *On suppose que* $\dim \mathrm{U} = n$ *et* $\dim \mathrm{V} = n$ *tel que* $n + m < +\infty$*. Alors* $\mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V},)$ *est isomorphe au* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ *des matrices à coefficients dans* $\mathbf{K}$ *à* m *lignes et* n *colonnes.*

Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathscr{L}(\mathrm{U},\mathrm{V}) & \to & \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{A}(f) \end{array}$$

avec $\mathrm{A}(f)$ la matrice représentant f dans les bases choisies. D'après la proposition II.3, ϕ est un isomorphisme.

Corollaire II.4. *On a* $\dim_{\mathbf{K}}(\mathrm{U},\mathrm{V}) = mn$*.*

Remarque II.5. On va prendre un cas particulier du corollaire II.4. Soit $\mathrm{V} = \mathbf{K}$ et $\dim \mathbf{K} = 1$ alors

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathscr{L}(\mathrm{U},\mathbf{K}) = \dim \mathrm{U}.$$

Ainsi, on a la caractérisation d'un nouvel espace qui va nous servir tout au long de ce cours.

Définition II.6 (Espace dual)**.** *L'*espace dual *de* U *noté* U^* *est* $\mathscr{L}(\mathrm{U},\mathbf{K}) = \mathrm{U}^*$*. Cet espace est de dimension* $\dim \mathrm{U}^* = \dim \mathrm{U}$.

II.3 Transposée d'une applicaion linéaire

Définition II.7. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *une application lin »aire, on associe à* f *une application linéaire* $f^* : \mathrm{V}^* \to \mathrm{U}^*$*, appelée* transposée *de* f*, définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathrm{V}^*, \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

La définition II.7 se résume en le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\circ f\in \mathrm{U}^*"'] & \mathrm{V} \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathbf{K} & \end{tikzcd}$$

Proposition II.8. *(i) Soient* U, V, W *des espaces de dimensions finies et soient* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *et* $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *des applications linéaires. Alors :*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

(ii) L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathscr{L}(\mathrm{U},\mathrm{V}) & \to & \mathscr{L}(\mathrm{V}^*,\mathrm{U}^*) \\ & & f & \mapsto & f^* \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*

Avant de démontrer cette proposition, on a besoin d'un lemme :

Lemme II.9. *Soit* V *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* $v \in \mathrm{V}$*. Si* $\forall \varphi \in \mathrm{V}^*$*,* $\varphi(v) = 0$ *alors* $v = 0_{\mathrm{V}}$*.*

Démonstration du lemme II.9. On montre la contraposée du lemme II.9. C'est-à-dire si $\forall v \in \mathrm{V}$, $v \neq 0$ alors il existe $\varphi \in \mathrm{V}^*$ tel que $\varphi(v) \neq 0$. Si $v \neq 0$ alors $\mathrm{Vect}(v)$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ avec $e_1 = v$ tel que tout vecteur w de V s'écrit :

$$w = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

On a alors que :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathrm{V} & \to & \mathbf{K} \\ & & w & \mapsto & \lambda_1 \end{array}$$

est une forme linéaire. Ainsi $\varphi(w) = \varphi(e_1) = 1$. Pour finir la démonstration, on remarque que $v = e_1$ et donc $\varphi(e_1) = 1 = \varphi(v)$. □

Démonstration de la proposition II.8. (i) On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "(g\circ f)(\psi)=\psi\circ(g\circ f)=(\psi\circ g)\circ f=f^*(g^*(\psi))"'] & \mathrm{V} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\psi\circ g=g^*(\psi)"'] & \mathrm{W} \arrow[d, "\psi\in\mathrm{W}^*"] \\ & & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

(ii) Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V},)$, on montre alors que $(f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u)$ et $(\lambda f_1)(u) = \lambda f_1(u)$. Soit $\varphi \in \mathrm{V}^*$, on a :

$$(f_1 + f_2)^*(\varphi) = \varphi \circ (f_1 + f_2) = \varphi \circ f_1 + \varphi \circ f_2 = f_1^*(\varphi) + f_2^*(\varphi).$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, shift left] & \mathrm{V} \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\varphi"'] \\ & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

On peut aussi montrer de la même manière que $(\lambda f)^* = \lambda f^*$. Donc : $f \to f^*$ est linéaire. Or $\dim \mathrm{U} = \dim \mathrm{U}^* = n$ et $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{V}^* = m$. Donc :

$$\dim \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = mn = \dim \mathscr{L}(\mathrm{V}^*, \mathrm{U}^*).$$

Il suffit de montrer que $f \to f^*$ est injective, autrement dit, il faut vérifier que $f^* = 0 \Rightarrow f = 0$. Supposons alors que $f^* = 0$, pour tout $\varphi \in \mathrm{V}^*$, on a : $f^*(\varphi) = \varphi \circ f = 0$. Ainsi

$$\forall \varphi \in \mathrm{V}^*,\ \forall u \in \mathrm{U}, \quad \varphi(f(u)) = 0. \tag{II.1}$$

D'après le lemme II.9, l'égalité (II.1) que pour tout $u \in \mathrm{U}$, $f(u) = 0$. Donc $f = 0$, ce qui achève la preuve.

□

II.4 Base duale

Soient V un espace vectoriel et $n = \dim_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}) < +\infty$. On a alors

$$\dim_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}^*) = \dim_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}) = n$$

.

Définition II.10. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* V*. On définit* $e_i^* \in \mathrm{V}$ *de la façon suivante :*

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases}$$

où δ_{ij} *représente le* symbole de Kronecker*. Ainsi,* $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ *forme une base de* V^* *et est appelé la* base duale *de la base* $(e_1, \ldots, e_n)$*.*

Démonstration. On démontrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de V^*. Pour cela, il suffit de montrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est un système libre. On considère donc l'égalité :

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0,$$

où les $\lambda_j \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $v \in \mathrm{V}$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_n e_n^*)(v) \\ &= \lambda_1 e_1^*(v) + \lambda_2 e_2^*(v) + \cdots + \lambda_n e_n^*(v) \end{aligned}$$

En particulier, si $v = e_j$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0 = \lambda_i e_i^*(e_i) = \lambda_i = 0.$$

On a montré alors que si

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0_{\mathrm{V}^*}$$

alors pour tout i, $\lambda_i = 0$. □

Proposition II.11. *Soient* U *et* V *deux* **K***-espaces vectoriels avec* $m = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{U}$ *et* $n = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V}$*,* $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ *une base de* U *et* $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ *une base de* V*. Soient* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *une application linéaire et* A *la matrice de* f *dans les bases* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *:*

$$1 \leq j \leq m, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

A *est alors une matrice à* n *lignes et* m *colonnes et* a_{ij} *correspond à l'élément de la* i^e *ligne et de la* j^e *colonne.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)=\varphi\circ f"'] & \mathrm{V} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}^* & \mathrm{V}^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Soit $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \dots, e_m^*)$ *et* $\mathscr{F}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ *alors la matrice de* f^* *dans les bases* $\mathscr{F}^*$ *et* $\mathscr{E}^*$ *est la transposée de* f *dans les bases* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$*.*

Démonstration. On a l'identité suivante :

$$f^*(f_\ell^*) = f_\ell^* \circ f = \sum_{k=1}^{n} b_{k\ell} e_k^*.$$

On cherche alors les $b_{k\ell}$. Comme $f_\ell^* \in \mathrm{V}^*$, on a $f^*(f_j) \in \mathrm{U}^*$. Donc :

$$f^*(f_\ell^*)(e_k) = f_\ell^*(f(e_k)) = \sum_{i=1}^{n} f_\ell^*(a_{ij} f_i) = a_{\ell k} f_\ell^*(f_\ell) = a_{\ell k}.$$

Mais aussi :

$$f^*(f_\ell^*)(e_k) = \left(\sum_{p=1}^{n} b_{p\ell} e_p^* \right)(e_k) = \sum_{p=1}^{n} b_{p\ell} e_p^*(e_k) = b_{k\ell} e_k^*(e_k) = b_{k\ell}.$$

On a alors : $b_{k\ell} = a_{\ell k}$. □

II.5 Bidual

Définition II.12. *Soit* V *un* **K***-espace vectoriel. Le* bidual *de* V *est défini comme* $\mathrm{V}^{**} = (\mathrm{V}^*)^*$ *(le dual du dual).*

Remarque II.13. On définit pour tout $v \in \mathrm{V}$, un élément de v^{**} de V^{**} de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in \mathrm{V}^*, \quad v^{**}(\varphi) = \varphi(v).$$

On a alors que v^{**} est une forme linéaire sur V^*,

1. $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{V}^*$, $v^{**}(\varphi_1 + \varphi_2) = v^{**}(\varphi_1) + v^{**}(\varphi_2)$,
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall \varphi \in \mathrm{V}^*$, $v^{**}(\lambda\varphi) = \lambda v^{**}(\varphi)$.

De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \mapsto & \mathrm{V}^{**} \\ v & \to & v^{**} \end{array}$$

est linéaire.

Proposition II.14. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \mapsto & \mathrm{V}^{**} \\ v & \to & v^{**} \end{array}$$

est injective.

Démonstration. On va montrer que le noyau de cette application linéaire est réduit au vecteur nul. Soit $v \in \mathrm{V}$ tel que $v^{**} = 0$ et que pour tout $\varphi \in \mathrm{V}^*$, $v^{**}(\varphi) = \varphi(v) = 0$. v vérifie alors pour tout $\varphi \in \mathrm{V}^*$:

$$\varphi(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

, d'après le lemme II.9. ☐

Corollaire II.15. *Si* $\dim \mathrm{V} < +\infty$ *alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \mapsto & \mathrm{V}^{**} \\ v & \rightarrow & v^{**} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. On sait que $\dim \mathrm{V}^* = \dim \mathrm{V}$ et $\dim \mathrm{V}^{**} = \dim(\mathrm{V}^*)^* = \dim \mathrm{V}^*$ alors $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{V}^* = \dim \mathrm{V}^{**}$ et d'après la proposition II.14, $v \mapsto v^{**}$ est lin »aire et injective. Cela implique donc que l'application $v \mapsto v^{**}$ est un isomorphisme. ☐

Remarque II.16. Soient V un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V. $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ une base de V^* et $(\mathscr{E}^*)^* = ((e_1^*)^*, \ldots, (e_n^*)^*)$ la base duale de $\mathscr{E}^*$. On peut montrer alors que :

$$\forall i, \quad (e_i^*)^* = e_i^{**}$$

II.6 Relations d'orthogonalité

Soient V un espace vectoriel et V^* son dual. Soient $v \in \mathrm{V}$ et $\varphi \in \mathrm{V}^*$. On note $\langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$.

Proposition II.17. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *a les propriétés suivantes :*

(i) $\langle v_1 + v_2, \varphi \rangle = \langle v_1, \varphi \rangle + \langle v_2, \varphi \rangle$,

(ii) $\langle \lambda v, \varphi \rangle = \lambda \langle v, \varphi \rangle$,

(iii) $\langle v, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle v, \varphi_1 \rangle + \langle v, \varphi_2 \rangle$,

(iv) $\langle v, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle v, \varphi \rangle$.

Définitions II.18. 1. *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$ *un espace vectoriel. L'*orthogonal *de* U, *noté* $\mathrm{U}^\perp$, *est :*

$$\mathrm{U}^\perp = \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \forall v \in \mathrm{U},\ \langle v, \varphi \rangle = 0\} = \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \forall v \in \mathrm{U},\ \varphi(v) = 0\} \subset \mathrm{U}^*.$$

2. *Soit* $\mathrm{U}' \subset \mathrm{V}$ *un sous-espace du dual. L'*orthogonal *de* U' *:*

$$\mathrm{U}'^\perp = \{v \in \mathrm{V},\ \forall \varphi \in \mathrm{U}',\ \langle v, \varphi \rangle = 0\} = \{v \in \mathrm{V}, \forall \varphi \in \mathrm{U}',\ \varphi(v) = 0\} = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{U}'} \mathrm{Ker}(f).$$

Théorème II.19. *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$ *et* $\mathrm{U}' \subset \mathrm{V}^*$ *des sous-espaces. Alors :*

(i) $(\mathrm{U}^\perp)^\perp = \mathrm{U}$,

(ii) $(\mathrm{U}'^\perp)^\perp = \mathrm{U}'$.

Proposition II.20. *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$ *un sous-espace vectoriel de* V. *Alors* U^* *et* $\mathrm{V}^*/\mathrm{U}^\perp$ *sont isomorphes*(1)*.*

(1) C'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme de U^* dans $\mathrm{V}^*/\mathrm{U}^\perp$.

Démonstration de la proposition II.20. Une application de restriction naturelle :

$$\begin{array}{rccc} r & : & \mathrm{V}^* & \longrightarrow & \mathrm{U}^* \\ & & \varphi & \longmapsto & \varphi|_{\mathrm{U}} \end{array}$$

est une application linéaire.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[dr, "\varphi|_{\mathrm{U}}"'] & \mathrm{V} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbf{K} \end{tikzcd} \quad \text{où } \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$$

On a alors :

1. $\varphi_1 + \varphi_2|_{\mathrm{U}} = \varphi_1|_{\mathrm{U}} + \varphi_2|_{\mathrm{U}}$,
2. $(\lambda\varphi_1)|_{\mathrm{U}} = \lambda|_{\varphi_1}\mathrm{U}$.

De plus, $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{V}$ avec $\mathrm{Ker}(r) = \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \varphi|_{\mathrm{U}} = 0\}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}^* \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{U}^* \\ \mathrm{V}^*/\,\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{V}^*/\mathrm{U}^\perp \arrow[ur, hook, "\tilde{r}"] \end{tikzcd}$$

où s est une application linéaire surjective et $\tilde{r}$ une application linéaire injective. De plus, r est surjective. Si $\psi \in \mathrm{U}^*$, soit U' un supplémentaire de U dans V, alors $\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{U}'$. On définit $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{K}$ avec $\varphi|_{\mathrm{U}} = \psi$ et $\varphi|_{\mathrm{U}'} = 0$. On sait que φ existe et est unique. On a alors $r(\varphi) = \psi$ et donc r est surjective.

En conclusion, $\tilde{r}$ est bijective et donc $\tilde{r}$ est un isomorphisme. □

Corollaire II.21. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$ *un sous-espace alors* $\dim \mathrm{U} + \dim \mathrm{U}^\perp = \dim \mathrm{V}$.

Démonstration. On a démontré que $\dim \mathrm{U} = \dim \mathrm{U}^*$. Or, d'après la proposition II.20, on a $\mathrm{U}^* = \mathrm{V}^*/\mathrm{U}^\perp$. Donc :

$$\dim \mathrm{U}^* = \dim(\mathrm{V}^*/\mathrm{U}^\perp) = \dim \mathrm{V}^* - \dim \mathrm{U}^\perp = \dim \mathrm{V} - \dim \mathrm{U}^\perp = \dim \mathrm{U}.$$

□

Démonstration du théorème II.19. On a $\mathrm{U} \subset (\mathrm{U}^\perp)^\perp$ car pour tout $u \in \mathrm{U}$ et pour tout $\varphi \in \mathrm{U}^\perp$, on a $\varphi(u) = 0$. Or,

$$\dim \mathrm{U}^\perp + \dim (\mathrm{U}^\perp)^\perp = \dim \mathrm{V}, \tag{II.2}$$

et

$$\dim \mathrm{U} + \dim \mathrm{U}^\perp = \dim \mathrm{V}^*. \tag{II.3}$$

Si on fait (II.2) − (II.3), on trouve :

$$\dim \mathrm{U}^\perp - \dim \mathrm{U}^\perp + \dim (\mathrm{U}^\perp)^\perp - \dim \mathrm{U} = 0.$$

Donc : $\dim \mathrm{U} = \dim (\mathrm{U}^\perp)^\perp$, d'où $\mathrm{U} = (\mathrm{U}^\perp)^\perp$. □

Remarque II.22. Concretement :

(i) Soit $u_1, \dots, u_k \in \mathrm{V}$ et $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ si et seulement $\forall \varphi \in \mathrm{V}^*$,

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \cdots = \varphi(u_k) = 0 \Longrightarrow \varphi(u) = 0.$$

(ii) Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathrm{V}^*$, on a alors $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ si et seulement si

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi.$$

Démonstration. On montre que la remarque II.22 est une traduction du théorème II.19.

(i) Soient $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $u \in \mathrm{V}$. Alors $u \in \mathrm{U} \Rightarrow u \in (\mathrm{U}^\perp)^\perp$.

$$\mathrm{U}^\perp = \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \forall j,\ 1 \leq j \leq k,\ \varphi(u_j) = 0\}.$$

(ii) Soit $\mathrm{U}^* = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \subset \mathrm{V}^*$, alors :

$$\mathrm{U}'^\perp = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \mathrm{Ker}\, \varphi_i.$$

□

Théorème II.23. *Soient* U *et* V *deux* **K***-espaces vectoriels tel que* $\dim \mathrm{U} < +\infty$ *et* $\dim \mathrm{V} < +\infty$*. Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *et* $f^* : \mathrm{V}^* \to \mathrm{U}^*$ *deux applications linéaires, l'une transposée de l'autre. Alors* $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$*.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^*) &= \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ f^*(\varphi) = 0\} = \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \varphi \circ f = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathrm{V}^*,\ \forall u \in \mathrm{U},\ \varphi(f(u)) = 0\} = \mathrm{Im}(f)^\perp. \end{aligned}$$

De plus, $\dim \mathrm{Im}\, f^* + \dim \mathrm{Ker}\, f^* = \dim \mathrm{V}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}\, f^* + \dim (\mathrm{Im}\, f)^\perp = \dim \mathrm{V}^* &\Longrightarrow \dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim (\mathrm{Im}\, f)^\perp \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{V}^* = \dim \mathrm{Im}\, f^* + \dim (\mathrm{Im}\, f)^\perp. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, f^*).$$

□

Corollaire II.24 (Rappel du théorème I.1)**.** *Soit* A *une matrice de dimension* $m \times n$ *à coefficients dans un corps* **K***. Alors* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}^*) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$*.*

Proposition II.25. *Soit* U *un* **K***-espace vectoriel de dimension finie.*

(i) Soient $u_1, \dots, u_d \in \mathrm{U}$ *et* $u \in \mathrm{U}$ *alors on a équivalence entre*

$$\forall \varphi \in \mathrm{U}^*,\ \varphi(u_1) = \cdots = \varphi(u_d) = 0 \Rightarrow \varphi(u) = 0 \tag{II.4}$$

et $u = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_d)$*.*

(ii) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathrm{U}^*$ *et soit* $\varphi \in \mathrm{U}^*$ *alors :*

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi \iff \varphi = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k).$$

Démonstration. (i) Soit $\mathrm{W} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_d)$ alors :

$$\varphi(u_1) = \cdots = \varphi(u_d) \iff \varphi \in \mathrm{W}^{\perp}.$$

Ainsi,

$$\text{(II.4)} \iff \forall \varphi \in \mathrm{W}^{\perp},\ \varphi(u) = 0 \iff u \in \left(\mathrm{W}^{\perp}\right)^{\perp} \iff u \in \mathrm{W}.$$

(ii) La démonstration est similiaire à (i).

□

Exemple II.26 (Exemple pour l'assertion (ii) de la proposition II.25)**.** Soit $u \in \mathbf{R}^4$. On définit :

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 - x_4,$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

et $\mathrm{U}^* \supset \mathrm{W}' = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

a) On cherche à déterminer $\mathrm{W}'^{\perp}$ (qui est inclu dans U).

$$\mathrm{W}'^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ;\ (\mathscr{S})\}.$$

avec

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{$\mathscr{S}$}$$

Ainsi,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{W}'^{\perp} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_1 \end{cases}$$

et donc : $\mathrm{W}'^{\perp} = \mathrm{Vect}(1, 1, -1, -1)$.

b) Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4$. On cherche à déterminer si $\varphi \in \mathrm{W}'$ (ou encore $\varphi \in \left(\mathrm{W}'^{\perp}\right)^{\perp}$).

$$\varphi \in \left(\mathrm{W}'^{\perp}\right)^{\perp} \iff \varphi(1, 1, -1, -1) = 0.$$

c) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre. En effet $\dim(\mathrm{W}'^{\perp}) = 1$ et $\dim \mathrm{W}' + \dim \mathrm{W}'^{\perp} = 4$ donc $\dim \mathrm{W}' = 3$.

CHAPITRE III

FORMES BILINÉAIRES

III.1 Définitions

Définition III.1. *Soient* $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ *trois* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \to \mathrm{W}$*, une application. On dit que* f *est* bilinéaire *si* f *est linéaire par rapport à la première et à la seconde variable séparement. C'est-à-dire :*

1. $\forall u \in \mathrm{U}$, $\forall v_1, v_2 \in \mathrm{V}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,

$$f(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(u, v_1) + \lambda_2 f(u, v_2),$$

2. $\forall v \in \mathrm{V}$, $\forall u_1, u_2 \in \mathrm{U}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 f(u_1, v) + \lambda_2 f(u_2, v).$$

On a, par conséquence,

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda_1 \mu_1 f(u_1, v_1) + \lambda_1 \mu_2 f(u_1, v_2) + \lambda_2 \mu_1 f(u_2, v_1) + \lambda_2 \mu_2 f(u_2, v_2).$$

Exemples III.2.

1. Soient $\mathrm{U} = \mathrm{V} = \mathrm{W} = \mathbf{K}$ et f l'application suivante :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ (u, v) & \mapsto & uv \end{array}.$$

   f est une application bilinéaire.

2. Soient $\mathrm{U} = \mathrm{V} = \mathbf{R}^2$ et $\mathrm{W} = \mathbf{R}$. On pose $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. L'application $f(u, v) = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2$ est une application bilinéaire.

On note $\mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathrm{W})$, l'ensemble des applications bilinéaires de $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ vers W.

Remarque III.3. Si U, V et W sont trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels alors $\mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathrm{W})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition III.4. *Si* $\mathrm{W} = \mathbf{K}$*, une application bilinéaire* $f : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \to \mathbf{K}$*est appelée une* forme bilinéaire.

Soit $f \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathbf{K})$. On définit les applications

$$f^{(1)} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \to & \mathrm{V}^* \\ u & \mapsto & f^{(1)}(u) \end{array} \quad \text{et} \quad f^{(2)} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \to & \mathrm{U}^* \\ v & \mapsto & f^{(2)} \end{array},$$

tels que $f^{(1)}(u)(v) = f(u, v)$ et $f^{(2)}(v)(u) = f(u, v)$.

Proposition III.5. *(i) Les applications $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont linéaires.*

(ii) Inversement, si $g : \mathrm{U} \to \mathrm{V}^*$ est une application linéaire, l'application $\mathrm{F} : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \to \mathbf{K}$ définie par $\mathrm{F}(u, v) = g(u)(v)$ est bilinéaire. De même avec une application linéaire $h : \mathrm{V} \to \mathrm{U}^*$.

Démonstration. (i) On veut montrer que $f^{(1)}$ est linéaire. On a pour tout $v \in \mathrm{V}$,

$$f^{(1)}(u_1 + u_2)(v) = f(u_1 + u_2, v) = f(u_1 + v) + f(u_2, v) = f^{(1)}(u_1)(v).$$

Donc : $f^{(1)}(u_1 + u_2) = f^{(1)}(u_1) + f^{(1)}(u_2)$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, on veut montrer ensuite que $f^{(1)}(\lambda u) = \lambda f^{(1)}(u)$. Pour tout $v \in \mathrm{V}$,

$$f^{(1)}(\lambda u)(v) = f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v) = \lambda f^{(1)}(u)(v).$$

Donc : $f^{(1)}(\lambda u) = \lambda f^{(1)}(u)$ et on a montré ainsi que $f^{(1)}$ est linéaire. On fait la même démonstration pour montrer que $f^{(2)}$ est une application linéaire.

(ii) Soient $g : \mathrm{U} \to \mathrm{V}^*$ une application linéaire et $\mathrm{F} : \mathrm{U} \to \mathrm{V} \to \mathbf{K}$ une application telle que $\mathrm{F}(u, v) = g(u)(v)$. On montre que F est une application bilinéaire. On a, pour $u \in \mathrm{U}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= g(u)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 g(u)(v_1) = \lambda_2 g(u)(v_2) \\ &= \lambda_1 \mathrm{F}(u)(v_1) + \lambda_2 \mathrm{F}(u, v_2), \end{aligned}$$

et pour $v \in \mathrm{V}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(v) \\ &= \lambda_1 g(u_1)(v) + \lambda_2 g(u_2)(v) = \lambda_1 \mathrm{F}(u_1, v) + \lambda_2 \mathrm{F}(u_2, v). \end{aligned}$$

□

Exemple III.6. Soient $\mathrm{U} = \mathrm{V} = \mathbf{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$. Soit l'application bilinéaire

$$f(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2,$$

alors l'application $f^{(1)}(u) = \{(y_1, y_2) \to y_1(x_1 - x_2) + y_2(x_1 + 2x_2)\}$.

Remarque III.7 (Cas particulier)**.** Si $\dim \mathrm{U} = m$ et $\dim \mathrm{V} = n$ alors $\mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathrm{W}) \simeq \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}^*)$. Ainsi, comme $\dim \mathrm{V}^* = \dim \mathrm{V} = n$ et $\dim \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}^*) = mn$, on a :

$$\dim \mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathbf{K}) = mn.$$

III.2 Écriture matricielle

Soient U et V deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim \mathrm{U} = m$ et $\dim \mathrm{V} = n$. On considère $(e_1, \ldots, e_m)$ base de U et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de V.

Définition III.8. *La matrice de $f \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathbf{K})$ par rapport à ces bases est, par définition, la matrice :*

$$\mathrm{A} = (f(e_i, f_j))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

où i est l'indice de ligne et j est l'indice de colonne.

Proposition III.9. *Soient $f \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathbf{K})$, $f^{(1)} \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}^*)$ et $f^{(2)} \in \mathscr{L}(\mathrm{V}, \mathrm{U}^*)$. Si $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ est la base duale de $(f_1, \ldots, f_n)$, la matrice de $f^{(1)}$ dans $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ est :*

$$f^{(1)}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i^*,$$

$$f^{(1)}(e_j)(f_i) = b_{ij} = f(e_j, e_i).$$

On a montré que la matrice de $f^{(1)}$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1^*, \ldots, f_m^*)$ est la transposée de la matrice de f dans les bases $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ et la matrice de $f^{(2)}$, dans les bases $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(e_1^*, \ldots, e_m^*)$ est égale à la matrice de f dans les bases $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$.

Proposition III.10. *Soit $u = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$ et $v = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n$. On définit alors les vecteurs :*

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a ainsi $f(u, v) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \mathrm{Y}$ avec A matrice de f.

Exemple III.11. Soient $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et $\mathrm{V} = \mathbf{R}^3$, $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$. Soient (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On définit :

$$\begin{pmatrix} f(e_1, f_1) & f(e_1, f_2) & f(e_1, f_3) \\ f(e_2, f_1) & f(e_2, f_2) & f(e_2, f_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi :

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Démonstration de la proposition III.10. On a :

$$\begin{aligned} f(x_1e_1+\cdots+x_me_m, y_1f_1+\cdots+y_nf_n) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf(e_i,f_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} f(e_i,f_j)y_j\right) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}. \end{aligned}$$

□

Proposition III.12 (Changement de bases)**.** *Soient* $(e_1,\dots,e_m)$ *et* $(e'_1,\dots,e_m)$ *des bases de* U*,* $(f_1,\dots,f_n)$ *et* $(f'_1,\dots,f'_n)$ *des bases de* V*. On considère* P *(resp.* Q*) matrice de changement de base pour* U *(resp. pour* V*). Soient* $u = x_1e_1+\cdots+x_me_m = x'_1e'_1+\cdots+x'_me'_m$ *et* $v = y_1f_1+\cdots+y_nf_n = y'_1f'_1+\cdots+y'_nf'_n$ *avec :*

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \ \mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

On a ainsi $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$*,* $\mathrm{Y}' = \mathrm{QY}'$ *et*

$$f(u,v) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY} = \mathrm{X}'^{\mathrm{T}}(\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})\mathrm{Y}' = \mathrm{X}'^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}',$$

avec A *matrice de* f *dans* $(e_1,\dots,e_m)$ *et* $(f_1,\dots,f_n)$ *et* A′ *matrice de* f *dans* $(e'_1,\dots,e'_m)$ *et* $(f'_1,\dots,f'_n)$ *tel que* $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}$*.*

Corollaire III.13. *On a les égalités suivantes :*

$$\mathrm{rg}\, f^{(1)} = \mathrm{rg}\, f^{(2)} = \mathrm{rg}(\mathrm{A}).$$

Démonstration. On a vu que la matrice de $f^{(2)} = \mathrm{A}$ et la matrice de $f^{(1)} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. Donc :

$$\mathrm{rg}(f^{(1)}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(f^{(2)}).$$

□

Définition III.14. *Soit* $f \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U},\mathrm{V};\mathbf{K})$*. On appelle* noyau à gauche *de* f*,* $\mathrm{Ker}\, f^{(1)} \subset \mathrm{U}$ *et* noyau à droite *de* f*,* $\mathrm{Ker}\, f^{(2)} \subset \mathrm{V}$*.*

Si $f^{(1)} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}^*$ et $f^{(2)} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}^*$, on a alors les propriétés suivantes :

$$\dim(\mathrm{U}) = \dim\mathrm{Ker}\, f^{(1)} + \mathrm{rg}(f),$$

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim\mathrm{Ker}\, f^{(2)} = \mathrm{rg}(f).$$

Et ainsi :

$$\dim(\mathrm{U}) - \dim\mathrm{Ker}(f^{(1)}) = \dim\mathrm{V} - \dim\mathrm{Ker}\, f^{(2)}.$$

Remarque III.15 (Cas particulier)**.** Si $\dim\mathrm{U} = \dim\mathrm{V}$ alors $\dim\mathrm{Ker}\, f^{(1)} = \dim\mathrm{Ker}\, f^{(2)}$.

III.3 Formes bilinéaires non dégénérées

Soient U et V deux **K**-espaces vectoriels de dimensions finies.

Définition III.16. *On dit que la forme bilinéaire $f : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \to \mathbf{K}$ est* non dégénérée *si* $\operatorname{Ker} f^{(1)} = \{0\}$ *(ce qui équivaut à* $\operatorname{Ker} f^{(2)} = \{0\}$*). Autrement dit $f^{(1)} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}^*$ et $f^{(2)} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}^*$ sont des isomorphismes.*

III.4 Formes bilinéaires symétriques

Soit U un **K**-espace vectoriel.

Définition III.17. *On dit que l'application bilinéaire $f : \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ est* symétrique *si pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, $f(u,v) = f(v,u)$.*

Définition III.18. *On dit que l'application bilinéaire $f : \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ est* anti-symétrique *si pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, $f(u,v) = -f(v,u)$.*

Proposition III.19. *Soient* $\dim \mathrm{U} = m < +\infty$ *et soit A la matrice de la forme bilinéaire dans une base de U.*

(i) f est symétrique si et seulement si $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$,

(ii) f est anti-symétrique si et seulement si $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A}$.

Démonstration. Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})$ tel que $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

(i) Si f est symétrique alors $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$ et donc : $a_{ij} = a_{ji}$. Inversement, si $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$ alors :

$$f(u,v) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{X} = f(v,u).$$

(ii) La démonstration du (ii) est la même que (i).

□

Remarque III.20. Soient $f \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}; \mathbf{K})$, $f^{(1)} \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}^*)$ et $f^{(2)} \in \mathscr{L}(\mathrm{V}, \mathrm{U}^*)$. f est symétrique si et seulement $f^{(1)} = f^{(2)}$.

Définition III.21. *Si U est un **K**-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée f, soit $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ un sous-espace de U, on appelle orthogonal de V* par rapport *à U, le sous-espace $\mathrm{V}^{\llcorner}$ de U défini par :*

$$\mathrm{V}^{\llcorner} = \{u \in \mathrm{U},\ \forall v \in \mathrm{V},\ f(u,v) = 0\}.$$

C'est un sous-espace de U.

Proposition III.22. *Sous les hypothèses de la définition III.21, $f^{(1)}\big|_{\mathrm{V}^{\llcorner}}$ est un isomorphisme de $\mathrm{V}^{\llcorner}$ ($\subset \mathrm{U}$) vers $\mathrm{V}^{\perp}$ ($\subset \mathrm{U}^*$).*

On rappelle que :

$$V^{\perp} = \{\varphi \in U^{*},\ \forall v \in V,\ \varphi(v) = 0\}.$$

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{array}{ccc} U & \mapsto & U^{*} \\ u & \to & f^{(1)}(u) \circ v \to f(u,v) \end{array}.$$

On a ainsi :

$$V^{\llcorner} = \{u \in U,\ \forall v \in V,\ f^{(1)}(u)(v) = 0\} = \{u \in U,\ f^{(1)}(u) \in V^{\perp}\} = {f^{(1)}}^{-1}(V^{\perp}).$$

□

Corollaire III.23. *On a les égalites suivantes :*

$$\dim V^{\llcorner} = \dim V^{\perp} = \dim U - dim V.$$

Exemples III.24. Soient $U = \mathbf{R}^2$ et $x, y \in U$ tel que $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

1. L'application bilinéaire $f(x,y) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + y_1y_2$ est symétrique.
2. L'application bilinéaire $g(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$ est anti-symétrique.

Proposition III.25. *Si le corps* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique*[(1)] $\neq 2$ *(par exemple,* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ *avec* $p \neq 2$*), toute forme bilinéaire* f *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* U *s'écrit de façon unique :*

$$f = f_{+} + f_{-}$$

avec f_{+} *(resp.* f_{-}*) une application bilinéaire symétrique (resp. anti-symétrique).*

Soit $\mathscr{L}_2^{+}(U,\mathbf{K})$ *(resp.* $\mathscr{L}_2^{-}(U,\mathbf{K})$*) l'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. anti-symétriques) sur* U *alors*

$$\mathscr{L}_2(U,\mathbf{K}) = \mathscr{L}_2^{+}(U,\mathbf{K}) \oplus \mathscr{L}_2^{-}(U,\mathbf{K}).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}_2(U,\mathbf{K})$. On a :

$$f(u,v) + f(v,u) = g(u,v) \in \mathscr{L}_2^{+}(U,\mathbf{K}) \tag{III.1}$$

et

$$f(u,v) - f(v,u) = h(u,v) \in \mathscr{L}_2^{-}(U,\mathbf{K}) \tag{III.2}$$

Si on fait (III.1) + (III.2), on obtient :

$$g(u,v) + h(u,v) = 2f(u,v).$$

Or, 2 est inversible sur le corps $\mathbf{K}$ considéré dans la proposition III.25 et donc :

$$f(u,v) = \frac{1}{2}g(u,v) + \frac{1}{2}h(u,v).$$

□

(1) Soit $p \in \mathbf{N}$. On dit qu'un corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique p si p est inversbile dans le corps $\mathbf{K}$

Proposition III.26. *Soit* U *muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré, on suppose que* $\dim \mathrm{U} = n < +\infty$. *Soient* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* U *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$. *Alors il existe* un unique $u \in \mathrm{U}$ *tel que pour tout* $1 \leq i \leq n$, $f(u, e_i) = a_i$.

Démonstration. On a l'équivalence suivante :

$$f(u, e_i) = a_i \iff f^{(1)}(u)(e_i) = a_i.$$

Il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ tel que $\varphi(e_i) = a_i$. Par ailleurs, il existe un unique $u \in \mathrm{U}$ tel que $f^{(1)}(u) = \varphi$. □

III.5 Formes quadratiques

Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$.

Proposition III.27. *Soit* U *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f, f' \in \mathscr{L}_2^+(\mathrm{U}, \mathbf{K})$. *Si pour tout* u, $f(u, u) = f'(u, u)$ *alors* $f = f'$.

Démonstration. Posons $q(u) = f(u, u)$ et $q'(u) = f'(u, u)$ alors on a,

$$q(u + v) = f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v)$$

Or f est symétrique donc

$$= q(u) + 2f(u, v) + q(v)$$

On fait de même pour f' :

$$q'(u + v) = q'(u) + 2f'(u, v) + q'(v).$$

L'hypothèse est que $q = q'$ donc si, pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, on a $2f(u, v) = 2f'(u, v)$, cela entraîne que pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, $f(u, v) = f'(u, v)$. De plus, on a :

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

□

Définition III.28. $q(u) = f(u, u)$ *est la* forme quadratique *associée à la forme bilinéaire symétrique* f *et* f *est appelée la* forme polaire *de la forme quadratique* q.

Proposition III.29 (Écriture matricielle)**.** *Soient* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* U *et* A *la matrice de* f *dans cette base.* A *s'écrit alors* $\mathrm{A} = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})$ *avec* $a_{ij} = a_{ji}$. *Soient* $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ *et* $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ *avec*

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a $f(u,v) = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}$*. Donc* $(q(u)) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}$*, c'est-à-dire*

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j = \mathrm{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

avec $\mathrm{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est un polynôme homogène de degré* 2*.*

Remarque III.30 (Comment retrouver la forme polaire f ?)**.** Soit

$$f(u,v) = \sum_{1\leq i\leq n} a_ix_iy_i + \sum_{i<j} a_{ij}(x_iy_j + y_jx_i).$$

On peut montrer que

$$f(u,u) = \frac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1}(y_1, \ldots, y_n) + \cdots + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_n}(y_1, \ldots, y_n)\right).$$

III.6 Produit scalaire

On considère $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Définition III.31. *Soit* U *un* **R***-espace vectoriel et* q *une forme quadratique. On dit que* q *est* positive *si pour tout* $u \in \mathrm{U}$*,* $q(u) \geq 0$*. On dit* q *est* définie positive *si pour tout* $u \in \mathrm{U}$*,* $q(u) > 0$*.*

Proposition III.32. *Soit* q *une forme quadratique positive et* f *sa forme polaire. Si* f *est non dégénéré alors* q *est définie positive.*

Théorème III.33. *Si* q *est une forme quadratique positive et* f *sa forme polaire alors :*

$$|f(u,v)| \leq \sqrt{q(u)q(v)}. \tag{III.3}$$

Démonstration. L'équivalence entre (III.3) et

$$\forall u, v \in \mathrm{V}, \quad f(u,v)^2 = q(u)q(v) \tag{III.4}$$

est évidente. Comme q est une forme quadratique positive alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, $q(u+tv) \geq 0$. Or :

$$\mathrm{Q}(t) = q(u+tv) = q(u) + 2tf(u,v) + t^2 \geq 0.$$

Le déterminant du polynome $\mathrm{Q}(t)$ est

$$\Delta = f(u,v)^2 - q(u)q(v) \leq 0$$

et entraîne la relation (III.4). □

Démonstration de la proposition III.32. U $\in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si pour tout $u \in \mathrm{V}$, $f(u,v) = 0$, si et seulement si $q(u) = 0$. De plus, f est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et si et seulement si $q(u) = 0 \iff u = 0$. □

Définition III.34. *Une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel réel* U *de dimension finie, dont la forme quadratique associée est définie positive, est un* produit scalaire.

Exemples III.35. Soient $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et $u, v \in \mathbf{R}^2$ tel que $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$.

1. $f(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2$ est un produit scalaire car $q(u) = x_1^2 + y_1^2$.
2. Soit $f'(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ dont sa forme quadratique est $q'(u) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$. q' est positive mais pas définie positive car $q'(u) = 0 \iff x_1 = x_2$. On a ainsi que f' est dégénéré et

   $$\mathrm{Ker}(f') = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ y_1(x_1 - x_2) + y_2(x_2 - x_1) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ x_1 = x_2\}.$$

CHAPITRE IV

ESPACES EUCLIDIENS

IV.1 Généralités

Définition IV.1. *Un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* U *de dimension finie et muni d'un produit scalaire est un* espace euclidien.

On notera le produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} \times \mathrm{U} & \mapsto & \mathbf{R} \\ (u, v) & \to & \langle u, v \rangle \end{array},$$

alors $q(u) = \langle u, u \rangle$.

Définition IV.2. *On définit la norme* $\|u\|$ *de* u*, la quantité* $\sqrt{q(u)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Proposition IV.3. *La norme* $\|u\|$ *de* u *vérifie les quatre propriétés suivantes :*

(i) $\forall u, v \in \mathrm{U},\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

(ii) $\|u\| \geq 0$,

(iii) $\|u\| = 0 \iff u = 0$,

(iv) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

Démonstration. On montre la propriété (i) et on peut faire de même pour les propriétés (ii), (iii) et (iv).

$$\begin{aligned} \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| &\iff \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \\ &\iff q(u) + q(v) + 2\langle u, v \rangle = q(u + v) \leq q(u) + q(v) + 2\sqrt{q(u)q(v)} \\ &\iff \langle u, v \rangle = \sqrt{q(u)q(v)}. \end{aligned}$$

□

Par conséquence, on peut alors définir une distance induite par la norme.

Définition IV.4. *Soit* U *un espace euclidien muni d'une distance* d *définie par* $d(u, v) = \|v - u\| \geq 0$*. Cette distance vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $d(u, v) = d(v, u)$,
2. $d(u, v) = 0 \iff u = v$,
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Lemme IV.5. *Soit* U *un espace euclidien et soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ *un sous-espace de* U. *Alors :* $\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\llcorner} = \mathrm{U}$.

Démonstration. On montre tout d'abord que $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{\llcorner} = \{0\}$. Soit $u \in \mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{\llcorner}$ alors $u \in \mathrm{V}$ et $u \in \mathrm{V}^{\llcorner}$.

$$u \in \mathrm{V}^{\llcorner},\ \forall v \in \mathrm{V}, \quad \langle u, v \rangle = 0.$$

En particulier : $q(u) = \langle u, u \rangle = 0$ implique que $u = 0$.

De plus, $\dim \mathrm{V}^{\llcorner} = \dim \mathrm{U} - \dim \mathrm{V}$ et donc $\dim(\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\llcorner}) = \dim \mathrm{V} + \dim \mathrm{V}^{\llcorner} = \dim \mathrm{V}$. Ainsi : $\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\llcorner} = \mathrm{U}$. □

Définitions IV.6. *Soit* $(u_1, \ldots, u_m)$ *un système de vecteurs de l'espace euclidien* U.

1. $(u_1, \ldots, u_m)$ *est* orthogonal *si pour tout* i, j *tel que* $i \neq j$, *on a :* $\langle u_i, u_j \rangle = 0$,
2. $(u_1, \ldots, u_m)$ *est* orthonormal *s'il est orthogonal et* $\|u_i\| = 1$, *pour tout* i *tel que* $1 \leq i \leq n$.
3. $(u_1, \ldots, u_m)$ *est une* base orthonormale *si, de plus,* $(u_1, \ldots, u_m)$ *forme une base.*

Théorème IV.7. *Tout espace euclidien* U *admet une base orthonormale.*

Démonstration. La démonstration se fait par réccurence sur $\dim \mathrm{U}$.

Initialisation Soient $\dim \mathrm{U} = 1$ et $u \in \mathrm{U}$ tel que $u \neq 0$. On considère

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|}.$$

Donc $\|u_1\| = 1$.

Hérédité Supposons la propriété vraie pour tout espace de dimension $< n$. Soit U euclidien tel que $\dim \mathrm{U} = n$. Soit V un sous-espace de U de dimension $n-1$. A l'espace V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restreint à V associe une structure d'espace euclidien sur V. D'après l'hypothèse de réccurence, il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ orthonormal de V tel que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$ et $\|e_i\| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Comme $\dim \mathrm{V} = n-1$ alors $\dim \mathrm{V}^{\llcorner} = 1$. On choisit $u \neq 0$, $u \in \mathrm{V}^{\llcorner}$. On pose :

$$e_n = \frac{u}{\|u\|}.$$

Alors $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ forme un système de vecteurs orthonormal de U car on a, $\langle e_j, e_n \rangle = 0$, pour tout $j < n$ (car $e_n \in \mathrm{V}^{\llcorner}$) et $\|e_n\| = 1$. Il faut vérifier que $(e_1, \ldots, e_n)$ forme une base de U. Or $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de V et (e_n) est une base de $\mathrm{V}^{\llcorner}$. D'après le lemme , on a :

$$\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\llcorner} = \mathrm{U}.$$

Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de U.

□

IV.2 Adjoint d'un endomorphisme

Soit U un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{U},)$ une application linéaire de U dans U.

Proposition IV.8. *Il existe une unique application linéaire $f^\vee : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel que :*

$$\forall u, v \in \mathrm{U}, \quad \langle u, f(v)\rangle = \langle f^\vee(u), v\rangle. \tag{IV.1}$$

Définition IV.9. *Dans la proposition IV.8, $f^\vee$ est appelé l'*adjoint *de f.*

Démonstration. Au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est associé un isomorphisme $\alpha : \mathrm{U} \to \mathrm{U}^*$ tel que $\alpha(u)(v) = \langle u, v\rangle$. On a :

$$\langle u, f(v)\rangle = \alpha(u)(f(v)) = f^*(\alpha(u))(v)$$

et

$$\langle f^\vee(u), v\rangle = \alpha(f^\vee(u))(v).$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\alpha(u))"'] & \mathrm{U} \arrow[d, "\alpha(u)"] \\ & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\text{IV.1}) &\iff \forall u, v \in \mathrm{U},\ f^*(\alpha(u))(v) = \alpha(f^*(u))(v) \\ &\iff \forall u \in \mathrm{U},\ f^*(\alpha(u)) = \alpha(f^\vee(u)) \\ &\iff f^* \circ \alpha = \alpha \circ f^\vee \\ &\iff f^\vee = \alpha^{-1} \circ f^* \circ \alpha. \end{aligned}$$

Pour bien comprendre la situation et pour en finir avec la démonstration,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "f^\vee"'] & \mathrm{U}^* \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{U} \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & \mathrm{U}^* \end{tikzcd}$$

□

Proposition IV.10. *Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et A la matrice de f dans cette base alors la matrice de $f^\vee$ est A^*.*

Démonstration. Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

On a alors :

$$\langle f(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, f^\vee(e_i)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{kj}e_k, e_i \right\rangle = a_{ij}.$$

La matrice de $f^\vee$ est $\mathrm{B} = (b_{ij})$:

$$\langle e_i, f^\vee(e_j)\rangle = \langle f^\vee(e_i), e_j\rangle = b_{ji}.$$

Ainsi, pour tout i et j, $a_{ij} = b_{ji}$ et donc $\mathrm{B} = \mathrm{A}^*$. □

Définition IV.11. *Soient* U *un espace euclidien muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$*. On dit que* f *est* autoadjoint *si* $f = f^\vee$*.*

Corollaire IV.12. *f est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.*

Proposition IV.13. *Soit* U *un espace euclidien muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*.*

(i) Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *linéaire alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}\times\mathrm{U} & \mapsto & \mathbf{K} \\ (u,v) & \to & \langle f(u), v\rangle \end{array}$$

est bilinéaire.

(ii) Tout forme bilinéaire sur U *est de ce type. Précisement, si* $\varphi \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U},\mathbf{K})$*, il existe une application linéaire unique* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *tel que :*

$$\forall u, v \in \mathrm{U}, \quad \varphi(u,v) = \langle f(u), v\rangle.$$

(iii) $(u,v) \mapsto \langle f(u), v\rangle$ *est symétrique si et seulement si* f *est autoadjoint.*

(iv) $(u,v) \mapsto \langle f(u), v\rangle$ *est non dégénérée si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$*.*

Démonstration. (i) On pose $\varphi(u,v) = \langle f(u), v\rangle$ avec $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ linéaire et on montre que φ est une application bilinéaire.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + \lambda' u', v) &= \langle f(\lambda u + \lambda' u'), v\rangle = \langle \lambda f(u) + \lambda' f(u'), v\rangle \\ &= \lambda\langle f(u), v\rangle + \lambda'\langle f(u'), v\rangle = \lambda\varphi(u,v) + \lambda'\varphi(u',v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(u, \mu v + \mu' v') &= \langle f(u), \mu v + \mu' v'\rangle = \mu\langle f(u), v\rangle + \mu'\langle f(u), v'\rangle \\ &= \mu\varphi(u,v) + \mu'\varphi(u,v').\end{aligned}$$

(ii) On se donne $\varphi \in \mathscr{L}_2(\mathrm{U},\mathbf{R})$ tel que :

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{(1)} & : & \mathrm{U} & \to & \mathrm{U}^* \\ & & u & \mapsto & (v \mapsto \varphi(u,v)) \end{array}.$$

Par ailleurs, on associe $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à

$$\begin{array}{cccc} \alpha & : & \mathrm{U} & \to & \mathrm{U}^* \\ & & u & \mapsto & (v \mapsto \langle u, v\rangle) \end{array}.$$

On a alors $\alpha(u)(v) = \langle u, v\rangle$ et $\varphi^{(1)}(u)(v) = \varphi(u,v)$. On cherche $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel que

$$\forall u, v \in \mathrm{U}, \quad \langle f(u), v\rangle = \varphi(u,v). \tag{IV.2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\text{IV.2}) &\iff \forall u, v,\ \alpha(f(u))(v) = \varphi^{(1)}(u)(v) \\ &\iff \forall u \in \mathrm{U},\ \alpha(f(u)) = \varphi^{(1)}(u) \\ &\iff \alpha \circ f = \varphi^{(1)} \iff f = \alpha^{-1} \circ \varphi^{(1)}. \end{aligned}$$

On a ainsi le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi^{(1)}"'] & \mathrm{U} \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{U}^* \end{tikzcd}$$

.

Autre méthode pour démontrer (ii). On cherche la matrice de f dans une base orthonormale. La matrice de f est égale à la matrice de φ. Soit $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ avec :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a ainsi : $\langle u, v\rangle = \mathrm{Y}^*\mathrm{X}$ et $\varphi(u,v) = \mathrm{Y}^*\mathrm{AX} = \mathrm{Y}^*\mathrm{X}'$ où A est la matrice de φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et avec $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Donc : $v' = x'_1e_1 + \cdots + x'_ne_n = f(u)$ avec :

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

□

(iii) En exercice.
(iv) En exercice.

□

IV.3 Automorphismes orthogonaux

Définition IV.14. *Soit* U *un espace euclidien muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Une application linéaire* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *est dite* orthogonale *si et seulent si :*

$$\forall u, v \in \mathrm{U}, \quad \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Proposition IV.15. *(i)* f *est orthogonale si et seulement si pour tout* $u \in \mathrm{U}$, $\|f(u)\| = \|u\|$.

(ii) Si f *est orthogonale,* f *est un automorphisme de* U.

(iii) f *est orthogonale si et seulement si* $f \circ f^{\vee} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}} = f^{\vee} \circ f$.

Démonstration. (i) Supposons que pour tout $u \in \mathrm{U}$, $q(f(u)) = q(u)$, où $q(u) = \langle u, u\rangle$. On veut montrer que pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, $q(f(u+v)) = q(u+v)$. On a alors

$$q(u+v) = q(u) + q(v) + 2\langle u, v\rangle, \tag{IV.3}$$

et :

$$q(f(u,v)) = q(f(u) + f(v)) = q(f(u)) + q(f(v)) + 2\langle f(u), f(v)\rangle. \tag{IV.4}$$

Or $q(f(u)) = q(u)$, donc

$$(\text{IV.3}) = (\text{IV.4}) \iff \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

(ii) Conséquence de (iii).

(iii) Pour tout $u, v \in \mathrm{U}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, f^{\vee}(f(v))\rangle = \langle u, v\rangle &\iff \langle u, (f^{\vee} \circ f)(v) - v\rangle = 0\\ &\iff \forall u \in \mathrm{U},\ f^{\vee} \circ f(v) = v \iff f^{\vee} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}.\end{aligned}$$

□

Proposition IV.16. *Soit* f *un automorphisme orthogonal.*

(i) Si $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base orthonormale de* U, *il en est de même de*

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

(ii) Si $(e_1, \dots, e_n)$ *et* $(f_1, \dots, f_n)$ *sont des bases orthonormales, il existe une unique application* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *tel que* $f(e_i) = f_i$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$. *De plus,* f *est un automorphisme orthogonal.*

Démonstration. (i) Comme on a $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ et $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$, l'assertion est évidente.

(ii) Soit f définie par $f(e_i) = f_i$. Soient $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. On a alors :

$$f(u) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = x_1f_1 + \cdots + x_nf_n,$$
$$f(v) = y_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = y_1f_1 + \cdots + y_nf_n.$$

Donc :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \langle u, v\rangle.$$

□

On rappelle que si $\varphi : \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ est bilinéaire et si $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ sont des bases de U, P est la matrice de passage :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AP},$$

avec A (resp. B) matrice de φ dans la première (resp. seconde) base.

Remarque IV.17. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ sont deux bases orthogonales. P, la matrice de passage est une matrice orthogonale (representant un automorphisme orthogonal dans une base orthogonale $\iff$ $\mathrm{P}^*\mathrm{P} = \mathrm{I}$) :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

IV.4 Décomposition canonique d'une forme quadratique

Théorème IV.18. *Soit* U *un espace vectoriel réel de dimension n. Alors toute forme quadratique q sur* U *s'écrit sous la forme :*

$$\forall u \in \mathrm{U}, \quad q(u) = \varphi_1(u)^2 + \cdots + \varphi_r(u)^2 - (\psi(u)^2 + \cdots + \psi_s(u)^2),$$

où les φ_i, $\psi_j \in \mathrm{U}^*$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \cdots, \psi_s)$ forme un système indépendant. De plus r et s ne dépendant que de q et $r + s$ est le rang *de la forme polaire associée.*

Démonstration. Pour montrer l'existence des φ_i et ψ_j, on aura besoin du théorème IV.19. Comme q est quadratique, on peut lui associer φ une forme polaire symétrique. Il existe une unique application linéaire $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel que

$$\forall u, v \in \mathrm{U}, \quad \varphi(u, v) = \langle f(u), v\rangle.$$

φ est symétrique $\Leftrightarrow$ f est autoadjoint. Il existe donc une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de U formée de vecteurs propres de f :

$$\forall i, \ 1 \leq i \leq n, \quad f(e_i) = \lambda_ie_i.$$

Soient $u = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= \langle f(u), v\rangle = \langle x_1\lambda_ie_i + \cdots x_n\lambda_ne_n, y_1e_1 + \cdots + y_ne_n\rangle \\ &= \lambda_1x_1y_1 + \lambda_2x_2y_2 + \cdots + \lambda_nx_ny_n.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x_i = y_i$,

$$q(u) = \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}. \tag{IV.5}$$

Quitte à réordonner la base, on peut supposer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} < 0$ et $\lambda r + s + 1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On pose pour $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i = \mu_i^2$, pour $r \leq j \leq r+s$, $\lambda_j = \nu_{j-r}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\mu_1x_1 &= \varphi_1(u) \\ &\vdots \\ \mu_rx_r &= \varphi_r(u) \\ \nu_1x_{r+1} &= \psi_1(u) \\ &\vdots \\ \nu_sx_{r+s} &= \psi_s(u).\end{aligned}$$

Ainsi, (IV.5) s'écrit

$$q(u) == \varphi_1(u)^2 + \cdots + \varphi_r(u)^2 - (\psi(u)^2 + \cdots \psi_s(u)^2).$$

Maintenant, on montre l'unicité de r et s. Si φ est non dégénérée. On note :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_+ &= \{u \in \mathrm{U},\ \varphi_1(u) = \cdots = \varphi_r(u) = 0\}, \\ \mathrm{U}_- &= \{u \in \mathrm{U},\ \psi_1(u) = \cdots = \psi_s(u) = 0\},\end{aligned}$$

tel que $\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_- = \mathrm{Ker}(\varphi)$. En effet :

$$\varphi(u,v) = \varphi_1(u)\varphi_1(v) + \cdots + \varphi_r(u)\varphi_r(v) - \psi_1(u)\psi(v) - \cdots - \psi_s(u)\psi_s(v).$$

Donc : $\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_- = \{0\}$. On a alors : $\mathrm{U}_+ \oplus \mathrm{U}_- = \mathrm{U}$. En effet,

$$\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_- = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s)^\perp = \{0\}.$$

Donc : $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s) = \mathrm{U}^*$. Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_+ &= \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)^\perp, \\ \mathrm{U}_- &= \mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_s)^\perp.\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\mathrm{U}_+ + \mathrm{U}_- = (\mathrm{V}ect(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \cap \mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_r))^\perp = \{0\}^\perp = \mathrm{U}.$$

On a alors que $r+s=n$. Supposons qu'on ait deux décompositions :

$$\begin{aligned} q(u) &= \varphi(u)^2 + \cdots + \varphi_r(u)^2 - (\psi_1(u)^2 + \cdots + \psi_s(u)^2) \\ &= \varphi'(u)^2 + \cdots + \varphi'_r(u)^2 - (\psi'_1(u) + \cdots + \psi'_s(u)^2). \end{aligned}$$

On veut montrer que $r = r'$ et $s = s'$. Soit $\mathrm{U} = \mathrm{U}_+ \oplus \mathrm{U}_- = \mathrm{U}'_+ \oplus \mathrm{U}'_-$. Comme $q|_{\mathrm{U}'_+}$, $q|_{\mathrm{U}_+}$ sont définies positives et $q|_{\mathrm{U}'_-}$ et $q|_{\mathrm{U}_-}$ est définie négative, d'après le lemme IV.20,

$$\mathrm{U}'_+ \cap \mathrm{U}_- = \{0\}.$$

On a $\dim \mathrm{U}_- = n-s$ et $\dim \mathrm{U}'_+ = n - r'$. On a ainsi que

$$\begin{aligned} n - s + n - r' \geq n &\iff s + r \geq n = s + r \\ &\iff r' \geq r. \end{aligned}$$

De même, $r \geq r'$ donc $r = r'$ et $s = s'$.

Enfin, on montre l'unicité dans le cas général, c'est-à-dire $r + s \leq \dim \mathrm{U}^*$. Soit f la forme bilinéiare symétrique polaire de q.

$$f(u,v) = \varphi_1(u)\varphi_1(v) + \cdots + \varphi_r(u)\varphi_r(v) - \psi_1(u)\psi_1(v) - \cdots - \psi_s(u)\psi_s(v).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \{u \in \mathrm{U},\ \forall u \in \mathrm{U}, f(u,v) = 0\} \\ &= \{u \in \mathrm{U}, \forall v \in \mathrm{U},\ \varphi_1(u)\varphi_1(v) + \cdots + \varphi_r(u)\varphi_r(v) \\ &\qquad\qquad - \psi_1(u)\psi_1(v) - \cdots - \psi_s(u)\psi_s(v)\} \\ &= \{u \in \mathrm{U},\ \varphi_1(u)\varphi_1 + \cdots + \varphi_r(u)\varphi_r - \psi_1(u)\psi - \cdots - \psi_s(u)\psi_s\} \\ &= \{u \in \mathrm{U},\ \varphi_1(u) = \cdots = \varphi_r(u) = \psi_1(u) = \cdots = \psi_s(u)\} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} \operatorname{Ker} \psi_j\right). \end{aligned}$$

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[rr, dotted, "\psi_j"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "s"'] & & \mathbf{R} \\ & \tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{U}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}_i"] \arrow[ur, bend right, "\tilde{\psi}_j"'] & \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\varphi}_i \circ s = \varphi_i.$$

nous dit que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(\varphi_i) \Leftrightarrow \tilde{\psi}_i$ existe et $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(\psi_j) \Leftrightarrow \tilde{\psi}_j$ existe. On définit $\tilde{f} : \tilde{\mathrm{U}} \times \tilde{\mathrm{U}} \to \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \tilde{\varphi}_1(\tilde{u})\tilde{\varphi}_1(\tilde{v}) + \cdots + \tilde{\varphi}_r(\tilde{u})\tilde{\varphi}_r(\tilde{v}) - \tilde{\psi}_1(\tilde{u})\tilde{\psi}_1(\tilde{v}) - \cdots - \tilde{\psi}_s(\tilde{u})\tilde{\psi}_s(\tilde{v}) \\ \tilde{q}(\tilde{u}) &= \tilde{\varphi}_1(\tilde{u})^2 + \cdots + \tilde{\varphi}_r(\tilde{u})^2 - \tilde{\psi}_1(u)^2 - \cdots - \tilde{\psi}_s(\tilde{u})^2. \end{aligned}$$

$\tilde{f}$ est non dégénérée car

$$\operatorname{Ker}(\tilde{f}) = \left(\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} \operatorname{Ker}\tilde{\psi}_j\right) = s(\mathrm{X}) = \{\tilde{0}\},$$

où $\mathrm{X} = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\varphi_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} \operatorname{Ker}\psi_j\right)\right)$. Soit $k = \dim\operatorname{Ker}(f)$ et $m - k = \operatorname{rg}(f)$. Comme (r, s) ne dépendant que de $\tilde{q}$ et que

$$\mathrm{B} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_r, \tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_s)$$

est une base de U^*, on a :

$$\operatorname{Vect}(\mathrm{B})^{\perp} = \left(\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(\tilde{\varphi}_i)\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} \operatorname{Ker}(\tilde{\psi}_j)\right) = \{\tilde{0}\}$$

et donc $\operatorname{Vect}(\mathrm{B}) = \tilde{\mathrm{U}}^*$ et

$$r + s = \dim\tilde{\mathrm{U}}^* = \dim\tilde{\mathrm{U}} = \dim\mathrm{U} - \dim\operatorname{Ker}(f) = m - k.$$

Donc : $r + s = \operatorname{rg}(f)$. □

Théorème IV.19. *Soit* U *un espace euclidien et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, *il existe une base orthogonale dans laquelle la matrice de* f *est diagonale.*

Démonstration. Admis pour l'instant. □

Lemme IV.20. *Soient* U_1 *et* U_2 *deux sous-espace de* U *tel que* $q|_{\mathrm{U}_1}$ *est définie positive et* $q|_{\mathrm{U}_2}$ *est définie négative alors* $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \{0\}$.

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$. Si $u \neq 0$, alors $q(u) > 0$ (car $u \in \mathrm{U}_1$) et $q(u) < 0$ (car $u \in \mathrm{U}_2$). Ce qui est absurde ! □

Définition IV.21. (r, s) *est la* signature *de la forme quadratique.*

Exemple IV.22. Soient $\mathrm{U} = \mathbf{R}^3$ et $q(x, y, z) = x^2 + (x + y - z)^2 + (z - y)^2$. La forme polaire associée est :

$$\begin{aligned} f((x, y, z), (x', y', z')) &= xx' + (x + y - z)(x' + y' - z') + (z - y)(z' - y') \\ &= x(2x' + y' - z') + y(x' + 2y' - 2z') + z(-x' - 2y + 2z'). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A de f s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4xz$$

En laissant le lecteur faire les calculs,

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{2}(y-z)^2.$$

La signature est donc $(2,0) = (r,s)$ et $r + s = \mathrm{rg}(f) = 2$.

Exemple IV.23. Soit $q(x,y,z) = 2(xy + yz + zx)$. On change les variables :

$$\begin{cases} x = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \\ y = \mathrm{X} - \mathrm{Y} \\ z = \mathrm{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X} = \frac{1}{2}(x+y) \\ \mathrm{Y} = \frac{1}{2}(x-y) \\ \mathrm{Z} = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) &= 2((\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) + (\mathrm{X}-\mathrm{Y})\mathrm{Z} + (\mathrm{X}+\mathrm{Y})\mathrm{Z}) \\ &= 2(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{X}\mathrm{Y}) \\ &= 2((\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2 - \mathrm{Z}^2 - \mathrm{Y}^2). \end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{rg}(f) = 3$ et la signature $(r,s) = (1,2)$. Soit A la matrice de q dans les bases canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les valauers propres de A :

$$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Le polynôme caratéristique de A est $\mathrm{P}(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ (car pour $\lambda = -1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{A}+\mathrm{I}) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}+\mathrm{I})$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0 = -1-1+2$). Il existe donc P une matrice de changement de base orthogonale inversible pour le produit scalaire usuel tel que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme on a : $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^*$, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^*\mathrm{A}\mathrm{P}$ est la matrice de la forme bilinéaire f dans la nouvelle base (f_1, f_2, f_3) consitutée de vecteurs propres. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \mathrm{X}f_1 + \mathrm{Y}f_2 + \mathrm{Z}f_3$, alors :

$$\begin{aligned} f(u,u') = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{pmatrix} \mathrm{B} \begin{pmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{pmatrix} &= \mathrm{X}\mathrm{X}' - \mathrm{Y}\mathrm{Y}' + 2\mathrm{Z}\mathrm{Z}' \end{aligned}$$

et donc si on considère q la forme quadratique :

$$q(u) = f(u,u) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{Z}^2 = \varphi_1(u)^2 - \varphi_2(u)^2 + 2\varphi_3(u)^2.$$

IV.5 Classification des isométries

Soit V un espace euclidien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. On rappelle que f est orthogonal si et seulement si pour tout $u, v \in \mathrm{V}$, $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Théorème IV.24. *Soit $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ un automorphisme orthogonal.*

(i) Les valeurs propres de f sont des nombres complexes λ avec $|\lambda| = 1$. En particulier, les seules valeurs propres réelles sont $+1$ ou -1.

(ii) Soient $\mathrm{V}_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{V}_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. On note $m_+ = \dim \mathrm{V}_1$ et $m_- = \dim \mathrm{V}_{-1}$. Il existe une base orthogonale

$$\mathrm{B} = (e_1, \ldots, e_{m_+}, e_{m_+} + 1, \ldots, e_{m_+ + m_-}, e_{m_+ + m_- + 1}, \ldots, e_m),$$

où $m = \dim \mathrm{V}$, dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \mathrm{A}_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \mathrm{A}_k \end{pmatrix}$$

avec :

$$\forall 1 \leq i \leq k, \quad \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i &&&& \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i &&&& \\ && \ddots & \ddots && \\ && \ddots & \ddots && \\ &&&& \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ &&&& \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $(e_1, \ldots, e_{m_+})$ est une base de V_+ et $e_{m_+ + 1}, \ldots, e_{m_+ + m_-}$ est une base de V_-.

Définition IV.25. *On dit que f est une* isométrie vectorielle *si f est un automorphisme orthogonal.*

Définitions IV.26. *1. Si $m = m_- + m_+$, f est la* symétrie orthogonale *par rapport à* V_1 *(et $\mathrm{V}_{-1} = {\mathrm{V}_1}^{\perp}$). Ainsi,*

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_{-1}$$

et pour tout $u \in \mathrm{V}$, il existe un unique $u_1 \in \mathrm{V}_1$ et un unique $u_{-1} \in \mathrm{V}_{-1}$ tel que $u = u_1 + u_{-1}$ et $f(u) = u_1 - u_{-1}$.

2. *Si $m_+ = n - 1$ et $m_- = 1$, f est un* retournement *par rapport à l'hyperplan* V_1.
3. *Si $m_+ = n - 2$ et $m_- = 0$ alors f est la* rotation *autour de* V_1 *d'angle θ et la matrice de f s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cos\theta & -\sin\theta \\ & & & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarques IV.27. 1. Il résulte du théorème que $\det(f) = (-1)^n$.

2. f est dit *isométrie directe* ou *déplacement* si $\det(f) = 1$.
3. f est dit *isométrie indirecte* ou *anti-déplacement* si $\det(f) = -1$.
4. On peut montrer que toute rotation est produit de deux retournements et en déduire que toute isométrie de dimension n est produit d'au plus n retournements.

Définition IV.28. *On note* $\mathbf{O}(\mathrm{V})$*, l'ensemble des isométries de* V *et* $\mathbf{SO}(\mathrm{V})$*, le* groupe spécial orthogonal*, l'ensemble des isométries directes de* V*.*

Soit U un espace euclidien de dimension $n = 2$, on va classifier les isométries.

Proposition IV.29. *(i) Si $m_+ = 2$ et $m_- = 0$ alors la matrice de f s'écrit :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f est donc une rotation d'angle 0.

(ii) Si $m_+ = 0$ et $m_- = 2$ alors la matrice de f s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(iii) Si $m_+ = m_- = 1$ alors la matrice de f s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est donc une symétrie indirecte.

(iv) Si $m_+ = m_- = 0$ *alors la matrice de* f *s'écrit :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f *est donc une rotation d'angle quelconque.*

On fait de même pour un espace euclidien U de dimension $n = 3$.

Proposition IV.30. *(i) Si* $m_+ + m_- = 3$,

a) Si $m_+ = 3$ *alors* $f = \mathrm{id}$ *et :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Si $m_- = 3$ *alors* $f = -\mathrm{id}$ *et :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Si $m_+ = 1$ *et* $m_- = 2$, f *est une symétrie orthogonale par rapport à la droite* V_1 *ou une rotation d'axe* V_1 *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Si $m_+ = 2$ *et* $m_1 = 1$, *on a :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Si $m_+ + m_- = 1$ *alors*

a) si $m_+ = 1$ *et* $m_- = 0$ *alors* f *est une rotation d'axe* V_1 *et d'angle* θ.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

b) Si $m_+ = 0$ *et* $m_- = 1$ *alors*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi f *est la composée d'une symétrie et d'une rotation.*

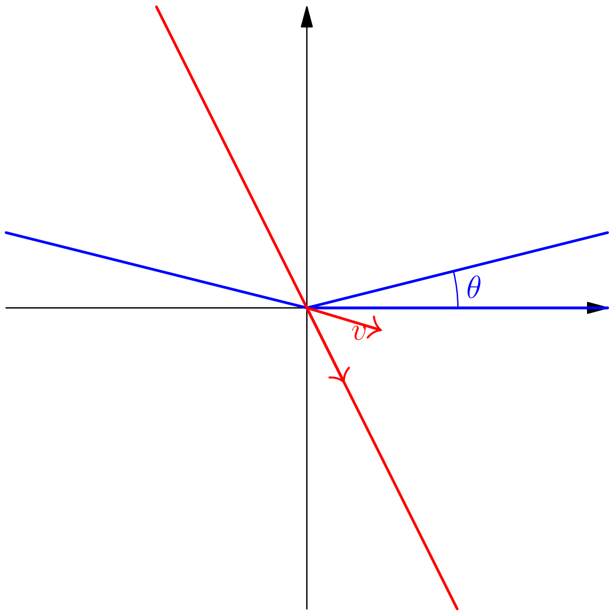

FIG. IV.1 – Toute rotation est le produit de deux retournements

On montre maintenant que toute rotation est le produit de deux retournements.

Démonstration. On peut tout d'abord voir une illustration de la proposition par la figure IV.1. Soient U un espace euclidien de dimension 2, f une rotation d'angle θ et (e_1, e_2) une base orthogonale dans laquelle la matrice f est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Soit u unitaire et arbitraire et v l'image de u par la rotation $\frac{\theta}{2}$. On considère g_u (resp. g_v) les retournements par rapport aux droites vecteurs (resp. $\mathrm{Vect}(v)$). Ainsi : $f = g_u \circ g_v$. $\square$

Remarque IV.31. Si $\dim \mathrm{V} = 2$, $\mathbf{SO}(\mathrm{V})$ est commutatif.En effet, si on pose :

$$\mathrm{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

on a : $\mathrm{A}(\theta_1)\mathrm{A}(\theta_2) = \mathrm{A}(\theta_2)\mathrm{A}(\theta_1) = \mathrm{A}(\theta_1) + \mathrm{A}(\theta_2)$, c'est-à-dire, en terme de matrices :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit f, g des isométries directes, il existe (e_1, e_2) une base orthonormale telle que $f = \mathrm{A}(\theta_1)$ et il existe (e'_1, e'_2) une base orthonormale telle que la matrice de $g = \mathrm{A}(\theta_2)$. On peut supposer que $\det_{(e_1,e_2)}(e'_1, e'_2) > 0$, c'est-à-dire que la matrice de passage est de la forme $\mathrm{A}(\alpha)$. La matrice de g dans la base (e_1, e_2) est aussi $\mathrm{A}(\theta_2)$. f et g sont représenté par $\mathrm{A}(\theta_1)$ et $\mathrm{A}(\theta_2)$ dans la même, ainsi $g \circ f$ est représentée par $\mathrm{A}(\theta_1) \circ \mathrm{A}(\theta_2) = \mathrm{A}(\theta_1 + \theta_2)$ et $f \circ g$ par $\mathrm{A}(\theta_2) \circ \mathrm{A}(\theta_1) = \mathrm{A}(\theta_1 + \theta_2)$.

CHAPITRE V

FORMES HERMITIENNES

V.1 Formes et espaces hermetiens

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Définition V.1. *Une* forme hermitienne *sur* V *est la donnée d'une application* $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbf{C}$ *telle que :*

1. *la forme est linéaire par rapport à la première variable,*
2. *pour tout* $(u, v) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V}$, *on a :* $f(v, u) = \overline{f(u, v)}$.

Par conséquent,

Proposition V.2. *(i)* $f(u, v_1 + v_2) = \overline{f(v_1, u)} + \overline{f(v_2, u)} = f(u, v_1) + f(u, v_2)$.
(ii) $f(u, \lambda v) = \overline{\lambda} f(u, v)$.

Démonstration. – (i)

$$f(u, v_1 + v_2) = \overline{f(v_1, u)} + \overline{f(v_2, u)} = f(u, v_1) + f(u, v_2).$$

– (ii)

$$f(u, \lambda v) = \overline{f(\lambda v, u)} = \overline{\lambda f(v, u)} = \overline{\lambda}\ \overline{f(v, u)} = \overline{\lambda} f(u, v)$$

□

Proposition V.3. *Pour tout* $u \in \mathrm{V}$, $f(u, u) \in \mathbf{R}$.

Démonstration. En effet, $f(u, u) = \overline{f(u, u)}$. □

Définition V.4. $q(u) = f(u, u)$ *est appelée la* forme quadratique *associée à la forme hermitienne de* f.

Proposition V.5. *Soient* f *et* g *deux formes hermitiennes. Si* $f(u, u) = g(u, u)$ *pour tout* $u \in \mathrm{V}$ *alors* $f = g$.

Définition V.6. *Soit* f *une forme hermitienne et* q *sa forme quadratique telle que* $q(u) = f(u, u)$. *On dit alors que* f *est la* forme polaire *de* q.

Exemple V.7. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur V. On a alors :

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(u)\overline{\varphi_i(v)}$$

est une forme linéaire.

Exemple V.8. Soit V un **C**-espace vectoriel tel que $\dim \mathrm{V} = n$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. f, définie comme suit :

$$f(u,v) : \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)\overline{e_i^*(v)}$$

est une forme hermtienne. Plus explicitement, soit $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$. On a :

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

et

$$q(u) = f(u,u) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On va maintenant décrire l'écriture matricielle d'une forme hermitienne f.

Définition V.9. *Soient* V *un* **C**-*espace vectoriel tel que* $\dim \mathrm{V} = n$ *et* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base de* V. *Soient* $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ *et* $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ *avec :*

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Soit f une forme hermitienne alors sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est

$$\mathrm{A} = (f(e_i, e_j))_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}.$$

Remarque V.10. D'après la définition V.1-2, on a $f(e_j, e_i) = \overline{f(e_i, e_j)}$ et donc : $\overline{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}} = \mathrm{A}$.

Proposition V.11. *On a :*

$$(f(u,v)) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{Y}}.$$

Démonstration. La démonstration se résume en un simple calcul :

$$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}f(e_i,e_j).$$

□

Corollaire V.12. *De plus, comme $f(u,u) = q(u)$, on a alors :*

$$(q(u)) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}.$$

Proposition V.13 (Changement de base)**.** *Soit* P *une matrice de passage tel que :*

$$\mathrm{X}' = \mathrm{PX} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{PY}.$$

Soient A *matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et* A′ *matrice de f dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$. On a :*

$$f(u,v) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{Y}} = \mathrm{X}'^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{Y}'} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}'\overline{\mathrm{PY}}.$$

Ainsi, $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}'\overline{\mathrm{P}}$

Proposition V.14. *Soit f une forme hermitienne alors l'*orthogonal *de* V *:*

$$\mathrm{V}^{\perp} = \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V},\ f(u,v) = 0\} = \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V},\ f(v,u) = 0\}$$

est un espace vectoriel de V*.*

Définition V.15. *Comme $f(v,u) = \overline{f(u,v)}$, alors :*

$$f(v,u) = 0 \iff f(u,v) = 0.$$

Définition V.16. *Une forme hermitienne* non dégénérée *est une forme dont le noyau est nul.*

Exemple V.17. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{V}^*$ et

$$f(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u)\overline{\varphi_j(v)}.$$

On suppose que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont indépendantes. Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$ alors pour tout $v \in \mathrm{V}$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(v)\overline{\varphi_j(u)} = 0 &\iff \sum_{j=1}^{k} \overline{\varphi_j(u)}\varphi_j = 0_{\mathrm{V}^*} \\ &\iff \forall j,\ 1 \leq j \leq k,\ \varphi_j(u) = 0 \iff u \in \bigcap_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Ker}(\varphi_j).\end{aligned}$$

Donc : f est non dégénérée si et seulement si :

$$\begin{aligned}\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \{0\} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)^{\perp} &\iff \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \mathrm{V}^* \\ &\iff (\varphi_i, \ldots, \varphi_k) \text{ est une base de } \mathrm{V}^* \\ &\iff k = \dim \mathrm{V}.\end{aligned}$$

Définition V.18. *Soit f une forme hermitienne et $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ un sous-espace vectoriel de V. On définit l'*orthogonal *par rapport à V, l'ensemble*

$$\mathrm{W}^{\llcorner} = \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{W},\ f(u,v) = 0\} = \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{W},\ f(v,u) = 0\}.$$

C'est un sous-espace de V.

Proposition V.19. *On suppose que f est non dégénérée alors :*

$$\dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{W}^{\llcorner} = \dim \mathrm{V}.$$

Remarque V.20. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V, f hermitienne. Soient A la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et $u \in \mathrm{V}$ tel que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Alors :

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}\, f &\iff \forall v \in \mathrm{V},\ f(v,u) = 0 \\ &\iff \forall \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \iff \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En l'occurence, f est non dégénérée si et seulement si A est inversible.

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{W}^{\llcorner}$. Par définition, pour tout $v \in \mathrm{W}$, on a :

$$f(u,v) = 0 = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}. \tag{V.1}$$

On pose $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ tel que :

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

On a ainsi pour tout $v \in \mathrm{W}$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{V}.1) &\iff \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff y_1 x'_1 + \cdots + y_n x'_n = 0 \end{aligned}$$

Donc : $u \in \mathrm{W}^{\llcorner} \Leftrightarrow \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} \in \mathrm{W}'$. Mais comme f est supposée non dégénérée, A est inversible et on a ainsi :

$$\dim \mathrm{W}' = \dim \mathrm{V} - \dim \mathrm{V} \Longrightarrow \dim(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{W}') = \dim \mathrm{W}' = \dim \mathrm{W}^{\llcorner}.$$

$\square$

Définition V.21. *Soient f une forme hermitienne et q sa forme quadratique associée.*

1. *On dit q est une forme quadratique* positive *si pour tout $u \in \mathrm{V}$, $q(v) \geq 0$.*
2. *On dit q est une forme quadratique* définie positive *si pour tout $u \in \mathrm{V}$, $q(u) > 0$ et $q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.*

Proposition V.22. *Soit f une forme hermitienne. On suppose que $q(u) = f(u,u)$ est positive. Alors :*

$$\forall u, v \in \mathrm{V}, \quad |f(u,v)| \leq \sqrt{q(u)q(v)}.$$

Démonstration. Soient $u, v \in \mathrm{V}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| = 1$ et tel que $\overline{\lambda} f(u,v) \geq 0$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} q(u + t\lambda v) &= f(u + t\lambda v, u + t\lambda v) \\ &= q(u) + t^2 q(v) + t\lambda f(u,v) + t\overline{\lambda} f(u,v) \\ &= q(u) + t^2 q(v) + 2t(f(u,v)). \end{aligned}$$

Comme le polynôme est toujours positive (à cause de la positivité de f), on a alors que le discriminant est négative. Ainsi :

$$|f(u,v)|^2 - q(u)q(v) \leq 0 \iff |f(u,v)| \leq \sqrt{q(u)q(v)}.$$

□

Corollaire V.23. *Sous les hypothèses de la proposition V.22, f est non dégénérée si et seulement si q est définie positive.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) On veut montrer que f non dégénérée implique q définie positive. Supposons que $q(u) = 0$, alors d'après la proposition V.22 :

$$\forall u \in \mathrm{V}, \quad |f(u,v)| = 0.$$

Donc :

$$\forall v \in \mathrm{V}, \quad f(u,v) = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

($\Leftarrow$) On veut montrer enfin que q définie positive implique que f est non dégénérée. Soit $u \in \mathrm{V}$ alors

$$\forall v \in \mathrm{V}, \quad f(u,v) = 0.$$

En particulier, si $u = v$, on a :

$$q(u) = f(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

□

Définition V.24. *Une forme hermitienne dont la forme quadratique associée est définie positive est un* produit scalaire hermitien.

Définition V.25. *On dit que φ est hermitienne ou* auto-adjointe *si et seulement si $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$.*

Proposition V.26. *Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

(i) Soit $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ linéaire hermitienne alors $f(u,v) = \langle \varphi(u), v\rangle$ est hermitienne.

(ii) Soit $f : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbf{C}$ une forme hermitienne alors il existe une unique $\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ hermitienne (ou auto-adjointe) tel que :

$$\forall u, v, \quad f(u,v) = \langle \varphi(u), v\rangle.$$

De plus, f est non dégénérée si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathrm{V}}\}$.

Démonstration. (i) On vérifie que f est hermitienne.

a)

$$\begin{aligned}\langle \varphi(\lambda u + \lambda u'), v\rangle &= \langle \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u'), v\rangle \\ &= \lambda\langle \varphi(u), v\rangle + \lambda'\langle \varphi(u'), v\rangle \\ &= \lambda f(u,v) + \lambda' f(u', v).\end{aligned}$$

b) On a :

$$f(v,u) = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle = \overline{\varphi(u), v} = \overline{f(u,v)}.$$

(ii) On se donne $f : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbf{C}$ hermitienne. On cherche $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ tel que $f(u,v) = \langle \varphi(u), v\rangle$. On choisit donc une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale de V, $u = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ tel que :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a donc l'écriture matricielle suivante :

$$(f(u,v)) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{Y}} = (\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\overline{\mathrm{Y}} = \overline{\mathrm{Y}}^{\mathrm{T}},$$

avec $\mathrm{X}'^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ (donc $\mathrm{X}' = \mathrm{A}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}$). On définit φ comme l'application linéaire $\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ dont la matrice par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est A^{T}. Si $u' = x'_1e_1 + \cdots + x'_ne_n$ avec

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

on a : $\varphi(u) = u'$,

$$(f(u,v)) = \mathrm{X}'^{\mathrm{T}}\overline{\mathrm{Y}},$$

et :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v\rangle &= \langle x_1', e_1 + \cdots + x_n' e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i' \overline{y_i} = \mathrm{X}'^{\mathrm{T}}\overline{\mathrm{Y}} = f(u,v).\end{aligned}$$

On montre maintenant l'unicité de φ. Soient φ_1 et φ_2 tel que $\langle \varphi_1(u), v\rangle = \langle \varphi_2(u), v\rangle$. Alors pour tout u, v, on a :

$$\langle \varphi_1(u) - \varphi_2(u), v\rangle = 0.$$

À cause de la non-dégénérence de φ_1 et φ_2, pour tout $u \in \mathrm{V}$, $\varphi_1(u) = \varphi_2(u)$ implique que $\varphi_1 = \varphi_2$. Donc on a bien unicité de φ et :

$$f(u,v) = \langle \varphi(u), v\rangle.$$

On a :

$$f(v,u) = \langle \varphi(v), u\rangle = \overline{f(u,v)} = \overline{\langle \varphi(u), v\rangle} = \langle v, \varphi(u)\rangle.$$

Donc :

$$\forall u, v, \quad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle.$$

On a bien φ auto-adjointe et :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V},\ f(u,v) = 0\} \\ &= \{u \in \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V},\ \langle \varphi(u), v\rangle = 0\} \\ &= \{u \in \mathrm{V},\ \varphi(u) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi.\end{aligned}$$

□

Proposition V.27. *Soit* V *un* **C***-espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Soit* $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *linéaire. Il existe une unique application* $\varphi^* : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *linéaire telle que :*

$$\forall u, v, \quad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi^*(u)\rangle.$$

Définition V.28. *Dans la proposition V.27, l'application* φ^* *est appelée l'*adjoint *de* φ.

Définition V.29. φ *est dite* hermitienne *ou* auto-adjointe *si* $\varphi^* = \varphi$.

Démonstration. On se fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale. Soit A la matrice de φ dans cette base. Soient $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $\varphi(u) = x_1' e_1 + \cdots + x_n' e_n$ et $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ avec :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

On a ainsi :

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overline{y_i} = \overline{X'}^{T}\overline{Y} = X^{T}A^{T}\overline{Y} = X^{T}\overline{(\overline{A^{T}}Y)}$$

On pose $A^* = \overline{A}^{T}$. Soit φ^* l'application linéaire dont la matrice est A^* dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors :

$$= X^{T}\overline{\overline{A}^{T}Y)} = X^{T}\overline{(A^*Y)} = \langle u, \varphi^*(v)\rangle.$$

On peut aussi montrer l'unicité de φ de la même façon que dans la démonstration précédente. □

Proposition V.30. *Soient* V *un* **C**-*espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *et une application* $\varphi : V \to V$ *linéaire.* φ *est hermitienne (ou auto-adjointe) si et seulement si pour tout* $u \in V$, $\langle \varphi(u), u\rangle \in \mathbf{R}$.

Avant de démontrer la proposition, on aura besoin de ce lemme :

Lemme V.31. *Soit* $\varphi : V \to V$ *une application linéaire. On a :*

$$\langle \varphi(u+v), u+v\rangle - \langle \varphi(u-v), u-v\rangle = 2(\langle \varphi(u), v\rangle + \langle \varphi(v), u\rangle).$$

Démonstration du lemme V.31. On se sert essentiellement de la bilinéarité du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u+v), u+v\rangle - \langle \varphi(u-v), u-v\rangle &= \langle \varphi(u), u\rangle + \langle \varphi(u), v\rangle + \langle \varphi(v), u\rangle + \langle \varphi(v), v\rangle \\ &\quad - (\langle \varphi(u), u\rangle - \langle \varphi(u), v\rangle - \langle \varphi(v), u\rangle + \langle \varphi(v), v\rangle) \\ &= 2(\langle \varphi(u), v\rangle + \langle \varphi(v), u\rangle)\end{aligned}$$

□

De cela, on en déduit un corollaire :

Corollaire V.32. *Si une application* $\varphi : V \to V$ *linéaire vérifie :* $\forall u, v \in V,\ \langle \varphi(u), v\rangle = 0$ *alors* $\varphi \equiv 0$.

Démonstration du corollaire V.32. D'après le lemme V.31,

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v\rangle = -\langle \varphi(v), u\rangle &\iff \langle \varphi(\mathrm{i}u), v\rangle = -\langle \varphi(v), \mathrm{i}u\rangle \\ &\iff \mathrm{i}\langle \varphi(u), v\rangle = \mathrm{i}\langle \varphi(v), u\rangle \iff \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \langle v\rangle, u\rangle.\end{aligned}$$

DOnc si pour tout $u, v \in V$, $\langle \varphi(u), v\rangle = 0$ alors pour tout $u \in V$, $\varphi(u) = 0$. Cela implique que $\varphi \equiv 0$. □

Passons maintenant à la démonstration de la proposition V.30.

Démonstration de la proposition V.30. a) Si $\varphi = \varphi^*$, on a alors pour tout $u, v \in \mathrm{V}$:

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

En particulier,

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \overline{\langle \varphi(u), u\rangle} \Longrightarrow \langle \varphi(u), u\rangle \in \mathbf{R}.$$

b) Supposons maintenant que pour tout $u \in \mathrm{V}$, $\langle \varphi(u), u\rangle \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $u, v \in \mathrm{V}$,

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi^*(v)\rangle \Longrightarrow \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi^*(u)\rangle = \langle \varphi^*(u), u\rangle \in \mathbf{R}.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathrm{V}$, $\langle \varphi(u) - \varphi^*(u), u\rangle \Longrightarrow \varphi = \varphi^*$.

□

Proposition V.33. *Soit* V *un* **C**-*espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *de dimension finie* ($\dim \mathrm{V} = n$)*. Soit* W *un sous-espace vectoriel de* V*. On a alors :*

$$\dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{W}^{\llcorner} = \dim \mathrm{V}.$$

Démonstration. Voir la démonstration de la proposition V.19. La proposition reste valable pour tout forme hermitienne non dégénérée. En particulier : $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^{\llcorner}$. □

Théorème V.34. *Un espace* V *muni d'un produit scalaire hermitien de dimension finie admet une base orthonormée.*

Démonstration. La démonstration se fait par réccurence sur la dimension de V. On rappelle que la norme d'un vecteur v est $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Initialisation Soient $\dim \mathrm{V} = 1$ et $e \in \mathrm{V}$ tel que $e \neq 0$. On définit :

$$e_1 = \frac{e}{\sqrt{\langle e, e\rangle}} = \frac{e}{\|e\|}$$

qui est bien de norme 1.

Hérédité Supposons que tout espace de dimension $\leq n-1$ muni d'un produit scalaire admet une base orthonormale. Soit $e_1 \in \mathrm{V}$ tel que $\|e_1\| = 1$. On considère $\mathrm{W} = \mathrm{Vect}(e_1)$. Comme $\mathrm{V} = \dim \mathrm{W} \oplus \dim \mathrm{W}^{\llcorner}$, on a bien : $\dim \mathrm{W}^{\llcorner} = n-1$. La restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\mathrm{W}^{\llcorner}$ est un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}}$ sur $\mathrm{W}^{\llcorner}$, c'est-à-dire pour $u, v \in \mathrm{W}^{\llcorner}$, on a :

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} = \langle u, v\rangle. \tag{V.2}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u + \lambda' u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} &= \langle \lambda u + \lambda' u, v\rangle \\
&= \lambda \langle u, v\rangle + \lambda' \langle u', v\rangle \\
&= \lambda \langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} + \lambda' \langle u', v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}},
\end{aligned}$$

et

$$\langle v, u\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} = \langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} = \overline{\langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}}}$$

De part la propriété (V.2), on a les propriétés suivantes, pour tout $u, v \in \mathrm{V}$, :

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} = \langle u, v\rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{\llcorner}} = 0 \iff \langle u, v\rangle = 0.$$

Par hypothèse de réccurence, il existe $(e_2, \dots, e_n)$ base orthogonale de $\mathrm{W}^{\llcorner}$. Alors la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de V. On remarque qu'elle est aussi orthonormée car on a prit $\|e_i\| = 1$. □

Définition V.35. *Un* espace hermitien *est un* **C**-*espace vectoriel de dimension finie et muni d'un produit scalaire hermitien.*

Théorème V.36. *Soit* V *un espace hermitien et* $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *une application linéaire hermitienne.*

(i) Les valeurs propres de φ *sont réelles.*

(ii) Si λ, μ *sont des valeur propres tels que* $\mu \neq \lambda$ *et si* $\mathrm{V}_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ *et* $\mathrm{V}_\mu = \operatorname{Ker}(\varphi - \mu\,\mathrm{id})$ *alors :*

$$\forall u, v,\ u \in \mathrm{V}_\lambda,\ v \in \mathrm{V}_\mu, \quad \langle u, v\rangle = 0.$$

(iii) Si $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ *est stable par* φ *(c'est-à-dire* $\varphi(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$*) alors* $\mathrm{W}^{\llcorner}$ *est stable par* φ*.*

(iv) φ *est diagonalisable dans une base orthonormale.*

Démonstration. (i) Comme φ est hermitienne, c'est-à-dire que A est inversible, il existe $u \in \mathrm{V}$, $u \neq 0$ tel que $\varphi(u) = \lambda u$. Ainsi,

$$\langle \varphi(u), u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle.$$

Comme $\langle \varphi(u), u\rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle u, u\rangle \neq 0$ car $u \neq 0$, on a ainsi : $\lambda \in \mathbf{R}$.

(ii) Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres disctintes, $u \in \mathrm{V}_\lambda$ (c'est-à-dire $\varphi(u) = \lambda u$) et $v \in \mathrm{V}_\mu$ (c'est-à-dire $\varphi(v) = \mu v$). On a :

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \overline{\mu}\langle u, v\rangle = \mu\langle u, v\rangle.$$

Donc :

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0.$$

Or, comme on avait $\lambda \neq \mu$, cela implique que $\langle u, v\rangle = 0$.

(iii) On suppose que $\varphi(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$. Soit $v \in \mathrm{W}^{\llcorner}$. Alors pour tout $u \in \mathrm{W}$:

$$\langle \varphi(v), u\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle = 0.$$

Or comme $v \in \mathrm{W}^{\llcorner}$ et $\varphi(u) \in \mathrm{W}$, on a : $\varphi(v) \in \mathrm{W}^{\llcorner}$.

(iv) Le polynôme caractéristique de φ se décompose totalement sur $\mathbf{C}$. Soit λ_1 une valeur propre et :

$$\mathrm{V}_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \neq \{0\}.$$

On a ainsi ${\mathrm{V}_{\lambda_1}}^{\llcorner}$ est un espace supplémentaire de V_{λ_1} et $\dim {\mathrm{V}_{\lambda_1}}^{\llcorner} < \dim \mathrm{V}$. Par réccurence sur la dimension, on pose $p = \dim \mathrm{V}_{\lambda_1}$, $q = \dim {\mathrm{V}_{\lambda_1}}^{\llcorner}$ et $n = p+q = \dim \mathrm{V}$, il existe une base orthonormale de ${\mathrm{V}_{\lambda_1}}^{\llcorner}$, $(e_1, \dots, e_q)$ formée de ecteur propres, c'est-à-dire pour tout $1 \leq j \leq q$, $\varphi(e_j) = \mu_j e_j$. Il existe aussi une base $(f_1, \dots, f_p)$ orthonormale de V_{λ_1} tel que $\varphi(f_i) = \lambda_i f_i$. Ainsi, $(f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_q)$ forme une base orthonormale de V. La matrice de φ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_q \end{pmatrix}.$$

□

Corollaire V.37. *Soit* V *un espace hermitien et* $f : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbf{C}$ *une forme hermitienne. Alors il existe une base* $(e_1, \dots, e_n)$ *orthonormale pour le produit scalaire tel que* f *s'exprime de la façon suivante :*

$$f(u, v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \overline{y_j}$$

avec $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ *et* $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$.

Démonstration. Il existe φ autoadjoint tel que pour tout $u, v \in \mathrm{V}$, $f(u, v) = \langle \varphi(u), v \rangle$. Il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ tel que $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$. Soit : $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. On a ainsi :

$$f(u, v) = \langle x_1 \lambda_1 e_1 + \cdots + x_n \lambda_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \overline{y_j}.$$

□

V.2 Automorphismes unitaires

Définition V.38. *Soit* U *un espace hermitien,* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *un endomorphisme.* f *est* unitaire *si et seulement si pour tout* $u, v \in \mathrm{U}$, $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

Remarque V.39. Cela implique que pour tout $u \in \mathrm{U}$,

$$\|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2.$$

Un endomorphisme unitaire conserve la norme.

Lemme V.40. *Un endomorphisme unitaire est un automorphisme.*

Démonstration. Si $u \in \mathrm{U}$ tel que $f(u) = 0$, on a :

$$0 = \|f(u)\| = \|u\| \Longrightarrow u = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est une application linéaire $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ injective donc, comme U est de dimension finie, bijective. □

Théorème V.41. *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ un automorphisme unitaire :*

(i) Les valeurs propres de f sont des nombres complexes de module 1.

(ii) Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f alors U_λ et U_μ sont en somme directe.

(iii) Si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$ alors $f(\mathrm{V}^\perp) \subset \mathrm{V}^\perp$.

(iv) Il existe une base orthonormale de U formée de vecteurs propres.

Démonstration. (i) Si λ est une valeur propre de f alors il existe $u \in \mathrm{U}$, $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle &\iff \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \langle u, u\rangle \\ &\iff \lambda\overline{\lambda}\langle u, u\rangle = \langle u, u\rangle \iff \lambda\overline{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

– (ii) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes. Il existe donc $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$ et $v \neq 0$ tel que $f(v) = \mu v$. On a :

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle &\iff \langle \lambda u, \mu v\rangle = \langle u, v\rangle \\ &\iff \lambda\overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$ alors $\lambda\mu^{-1} \neq 1$ donc :

$$\iff \langle u, v\rangle(1 - \lambda\overline{\mu}) = 0 \iff \langle u, v\rangle = 0.$$

(iii) Soit $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. Si $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$ alors $f(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$. Soient $u \in \mathrm{V}^\perp$ et $w \in \mathrm{V} = f(u)$. Donc il existe $v \in \mathrm{V}$ tel que $f(v) = w$. On a ainsi :

$$\langle f(u), w\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle = 0.$$

Or, comme $u \in \mathrm{V}^\perp$ et $v \in \mathrm{V}$, on a bien : $f(u) \in \mathrm{V}^\perp$.

(iv) La démonstration se fait par réccurence sur les dimensions en utilisant les propriétés (ii) et (iii). Soient λ_1 une valeur propre et $\mathrm{U}_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id})$. Comme $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp$, on a : $f(\mathrm{U}_{\lambda_1}) = \mathrm{U}_{\lambda_1} \Longrightarrow f(\mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp) = \mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp$. On considère $g = f|_{\mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp}$ est un automorphisme unitaire. On applique finalement l'hypothèse de réccurence à g et $\mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp$ ($\dim \mathrm{U}_{\lambda_1}^\perp = \dim \mathrm{U} - \dim \mathrm{U}_{\lambda_1} < \dim \mathrm{U}$).

□

CHAPITRE VI

COMPLEXIFICATION D'UN ESPACE EUCLIDIEN

VI.1 Complexifié d'un espace vectoriel réel

On considère $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et de base $(1, \mathrm{i})$. C'est-à-dire que tout nombre complexe s'écrit de façon unique comme $x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbf{R}$.

Maintenant soit U un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, on considère $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$. On a ainsi :

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C}) = 2 \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{U}.$$

On montre que $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$, $\mathbf{R}$-linéaire. On veut savoir si $\lambda f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$(\lambda f)(\alpha u) = \lambda f(\alpha u) = \lambda \alpha f(u) = \alpha(\lambda f(u)) = \alpha(\lambda f)(u).$$

Lemme VI.1. *On a :*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C}) = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{U}.$$

Précisément, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de U *sur* $\mathbf{R}$ *et $(e_1^*, \ldots, e_n^*) \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$ définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. On a $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$.*

Démonstration. 1. On montre que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une partie génératrice de $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$. Soit $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$ et $\lambda_i = \varphi(e_i) \in \mathbf{C}$. Alors :

$$\varphi = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^*.$$

2. On montre enfin que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une famille libre de $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$. On suppose que :

$$\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0.$$

Alors, soit $1 \leq i \leq n$, l'image de e_i s'exprime :

$$\lambda_1 e_1^*(e_i) + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1}^*(e_i) + \lambda_i e_i^*(e_i) + \lambda_{i+1} e_{i+1}^*(e_i) + \cdots + \lambda_n e_n^*(e_i) = 0$$

implique que $\lambda_i e_i^*(e_i) = 0$ et implique ainsi que $\lambda_i = 0$. Ce qui fait que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une famille libre de $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$.

$\square$

Définition VI.2. *Soit* U *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel. On appelle le* complexifié *de* U *:*

$$\mathrm{U}_{\mathbf{C}} = (\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C}))^{*\mathbf{C}}.$$

$\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *est un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel de même dimension que* U*.*

Définition VI.3. *On définit l'application :*

$$\begin{array}{cccc} ** & : & \mathrm{U} & \to & \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \\ & & u & \mapsto & u^{**} \end{array}$$

telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C},)$*,*

$$u^{**}(\varphi) = \varphi(u).$$

Théorème VI.4. *(i) L'application*

$$\begin{array}{cccc} ** & : & \mathrm{U} & \to & \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \\ & & u & \mapsto & u^{**} \end{array}$$

est $\mathbf{R}$*-linéaire et injective. De plus, l'image d'un système libre de* $\mathbf{R}$ *est un système libre sur* $\mathbf{C}$*. En particulier, si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base de* U *sur* $\mathbf{R}$*,* $(e_1^{**}, \dots, e_n^{**})$ *est une base de* $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *sur* $\mathbf{C}$*.*

(ii) Tout vecteur de $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *s'écrit de façon unique :* $u^{**} + \mathrm{i}v^{**}$ *avec* $u, v \in \mathbf{C}$*.*

(iii) Pour tout $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* W *et toute application* $\mathbf{R}$*-linéaire* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$*, il existe une une application* $\mathbf{C}$*-linéaire* $\tilde{f} : \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{W}$ *tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "**"'] & \mathrm{W} . \\ \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(iv) Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *une application* $\mathbf{R}$*-linéaire où* U *et* V *sont des espaces vectoriels réels de dimension finie sur* $\mathbf{R}$*, il existe alors une unique application* $\mathbf{C}$*-linéaire* $f_{\mathbf{C}} : \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ *tel que :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "**"] & \mathrm{V} \arrow[d, "**"'] \\ \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \arrow[r, "f_{\mathbf{C}}"] & \mathrm{V}_{\mathbf{C}} \end{tikzcd}$$

Démonstration. (i) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $u, v \in \mathrm{U}$. On montre que $(\alpha u + \beta v)^{**} = \alpha u^{**} + \beta v^{**}$. On a, par définition, si $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C},)$:

$$(\alpha u + \beta v)^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) = \alpha u^{**}(\varphi) + \beta v^{**}(\varphi).$$

Ainsi, $**$ est $\mathbf{R}$-linéaire. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ un système libre sur $\mathbf{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{C}$:

$$\lambda_1 e_1^{**} + \cdots + \lambda_k e_k^{**} = 0.$$

On pose $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$ avec $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned}\lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_k\varphi(e_k) = 0 &\Longrightarrow (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1)\varphi(e_1) + \cdots + (\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)\varphi(e_k) = 0\\ &\Longrightarrow \alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(e_k) + \mathrm{i}(\beta_1\varphi(e_1) + \cdots + \beta_k\varphi(e_k)).\end{aligned}$$

On a alors, pour tout $\varphi \in \mathrm{U}^*$:

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k) = 0$$
$$\varphi(beta_1 e_1 + \cdots + \beta_k e_k) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{cases}\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0\\ \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_k e_k = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0\\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0\end{cases}.$$

Cela implique que pour tout j, $\lambda_j = 0$.

(ii) Soient $w \in \mathrm{U}_{\mathbf{C}} = (\mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C}))^{*\mathbf{C}}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de U sur $\mathbf{R}$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tel que :

$$w = \lambda_1 e_1^{**} + \cdots + \lambda_n e_n^{**}.$$

On pose $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}w &= (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1)e_1^{**} + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n)e_n^{**}\\ &= (\alpha_1 e_1^{**} + \cdots + \alpha_n e_n^{**}) + \mathrm{i}(\beta_1 e_1^{**} + \cdots + \beta_n e_n^{**})\\ &= u^{**} + \mathrm{i}v^{**},\end{aligned}$$

avec $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ et $v = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_k e_k \in \mathrm{U}$. On montre maintenant l'unicité de l'écriture . Soit $u^{**} + \mathrm{i}v^{**} = 0$ dans $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ avec $u, v \in \mathrm{U}$ alors $u = v = 0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}, \mathbf{C})$:

$$(u^{**} + \mathrm{i}v^{**})(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi(u) + \mathrm{i}\varphi(v) = 0.$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathrm{U}^*$,

$$\varphi(u) + \mathrm{i}\varphi(v) = 0 \Longrightarrow \varphi(u) = \varphi(v) = 0 \Longrightarrow u = v = 0.$$

(iii) Nécessairement : $\tilde{f}(u^{**}) = f(u)$. On définit $\tilde{f}$ par les relations :

$$\forall u, v, \quad \tilde{f}(u^{**} + \mathrm{i}v^{**}) = f(u) + \mathrm{i}f(v).$$

$\tilde{f}$ ainsi définie est bien $\mathbf{C}$-linéaire.

(iv) Soit g définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \mathrm{V} \arrow[d] \\
\mathrm{U}_{\mathbf{C}} \arrow[r, dotted] & \mathrm{V}_{\mathbf{C}}
\end{tikzcd}.$$

On a ainsi g $\mathbf{R}$-linéaire.

$\square$

Remarque VI.5. Pour (iv), si on a $f_1 : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ et $f_2 : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ $\mathbf{R}$-linéaire. On a :

$$(f_2 \circ f_1)_{\mathbf{C}} \to (f_2)_{\mathbf{C}} \circ (f_1)_{\mathbf{C}}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[rr, "f_2 \circ f_1"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[ddd] & & \mathrm{W} \arrow[ddd] \\
& \mathrm{V} \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[d] & \\
& \mathrm{V}_{\mathbf{C}} \arrow[dr, "f_{2\mathbf{C}}"] & \\
\mathrm{U}_{\mathbf{C}} \arrow[ur, "f_{1\mathbf{C}}"] \arrow[rr, "(f_1)_{\mathbf{C}} \circ (f_2)_{\mathbf{C}} = (f_2 \circ f_1)_{\mathbf{C}}"'] & & \mathrm{W}_{\mathbf{C}}
\end{tikzcd}$$

Remarque VI.6. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de U et $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de V. Soit A la matrice de $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ dans ces bases. La matrice de $f_{\mathbf{C}}$ dans les bases $(e_1^{**}, \dots, e_n^{**})$ et $(f_1^{**}, \dots, f_n^{**})$ est encore A.

Démonstration. On a :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \quad a_{ij} \in \mathbf{R},$$

$$f_{\mathbf{C}}(e_j^{**}) = f(e_j)^{**} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i^{**} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i^{**}.$$

$\square$

Dans la suite, on identifiera U et son image dans $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{U} & \mapsto & \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \\
u & \to & u^{**}
\end{array}$$

On posera $u_{\mathbf{C}} = u$. Tout vecteur de $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ s'écrit de façon unique $u + \mathrm{i}v$ avec $u, v \in \mathrm{U}$.

VI.2 Complefixiée d'une forme bilinéaire symétrique

Proposition VI.7. *Soit* $f : \mathrm{U}\times\mathrm{U} \to \mathbf{R}$ *bilinéaire symétrique alors il existe une unique* $f_{\mathbf{C}}$ *une forme hermitienne qui va de* $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}\times\mathrm{U}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ *qui prolonge* f*, c'est-à-dire* $\forall u, v \in \mathrm{U} \subset \mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *qui prolonge* f*, c'est-à-dire pour tout* $u, v \in \mathrm{U} \subset \mathrm{U}_{\mathbf{C}}$*,* $f_{\mathbf{C}}(u, v) = f(u, v)$*.*

Démonstration. Si $g : \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \times \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ est auto-adjointe et vérifiant $g(u, v) = f(u, v)$ pour $u, v \in \mathrm{U}$. Nécessairement,

$$\begin{aligned} g(u + \mathrm{i}u', v + \mathrm{i}v') &= g(u, v) - \mathrm{i}g(u, v') + \mathrm{i}g(u', v) + g(v, v') \\ &= f(u, v) - \mathrm{i}f(u, v') + \mathrm{i}f(u', v) + f(u', v) \end{aligned}$$

Donc on a unicité. Inversement on vérifie que cette formule définie bien une forme hermitienne qui répond à la question. □

Proposition VI.8. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* U*,* f *bilinéaire symétrique* $\mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathbf{R}$*.*

(i) *La matrice de* $f_{\mathbf{C}}$ *dans la base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *est égale à la matrice de* f *dans la base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* U*.*

(ii) $\mathrm{rg}(f_{\mathbf{C}}) = \mathrm{rg}(f)$*. En particulier,* $f_{\mathbf{C}}$ *est non dégénérée* $\Leftrightarrow$ f *est non dégénérée.*

(iii) $q_{\mathbf{C}}$ *est positive si et seulement si* q *est positive et* $q_{\mathbf{C}}$ *est définie positive si et seulmenet si* q *est définie positive.*

Démonstration. (i) La matrice de $f_{\mathbf{C}}$ est caractérisée par $(f_{\mathbf{C}}(e_i, e_j))$ mais d'après la proposition VI.7, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $f_{\mathbf{C}}(e_i, e_j) = f(e_i, e_j)$. Donc : $(f_{\mathbf{C}}(e_i, e_j)) = (f(e_i, e_j))$. C'est donc égale à A la matrice de f.

(ii) On a alors $\mathrm{rg}\, f_{\mathbf{C}} = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(f)$. Si le rang est maximal alors $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f_{\mathbf{C}} = 0$.

(iii)

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{C}}(u + \mathrm{i}u') = f_{\mathbf{C}}(u + \mathrm{i}u', u + \mathrm{i}u') &= f_{\mathbf{C}}(u, u) - \mathrm{i}f_{\mathbf{C}}(u, u') + \mathrm{i}f_{\mathbf{C}}(u', u) + f_{\mathbf{C}}(u', u') \\ &= f(u, u) - \mathrm{i}f(u, u') + \mathrm{i}f(u', u) + f(u', u') = q(u) + q(u'). \end{aligned}$$

□

VI.3 Complexifié d'un espace euclidien

Soit U un espace euclidien muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}}$ la forme hermitienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. D'après la proposition VI.8, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}}$ est un produit scalaire hermitien. On a que $(\mathrm{U}_{\mathbf{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}})$ est un produit scalaire hermitien.

Proposition VI.9. *Soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ *un sous-espace de l'espace euclidien. On considère*

$$(\mathrm{V}^{\perp})_{\mathbf{C}} \subset \mathrm{U}_{\mathbf{C}}.$$

(i) $(\mathrm{V}^{\perp_{\mathrm{U}}})_{\mathbf{C}} = \mathrm{V}_{\mathbf{C}}^{\perp_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}}$.

(ii) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormale de* U *alors* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormale de* $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$*.*

Démonstration. Soit $u, v \in \mathrm{U}$ alors on a : $\langle u, v\rangle_{\mathbf{C}} = \langle u, v\rangle$. En particulier, $u \perp v \in \mathrm{U} \Leftrightarrow u \perp v \in \mathrm{U}_{\mathbf{C}}$. ☐

Proposition VI.10. *Soient* U *un espace euclidien et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *une application.*

$$f^*{}_{\mathbf{C}} = (f_{\mathbf{C}})^*,$$

avec f^* *l'autoadjoint de* f*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *auto-adjoint,*

(ii) $f_{\mathbf{C}}$ *auto-adjoint,*

(iii) $f = f^*$,

(iv) $f_{\mathbf{C}} = (f^*)_{\mathbf{C}} = (f_{\mathbf{C}})^*$.

Démonstration. Pour tout $u, v \in \mathrm{U}$,

$$\begin{aligned}\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle &\iff \langle f(u), v\rangle_{\mathbf{C}} = \langle u, f^*(v)\rangle_{\mathbf{C}} \\ &\iff \langle f_{\mathbf{C}}(u + \mathrm{i}u'), v + \mathrm{i}v'\rangle_{\mathbf{C}} = \langle u + \mathrm{i}u', (f^*)_{\mathbf{C}}(v + \mathrm{i}v')\rangle_{\mathbf{C}},\end{aligned}$$

et ceci pour tout $u + \mathrm{i}u'$ et $v + \mathrm{i}v'$. Cela implique que $(f^*)_{\mathbf{C}} = (f_{\mathbf{C}})^*$. ☐

Proposition VI.11. *Soient* U *un espace euclidien et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *auto-adjoint. On lui associe* $f_{\mathbf{C}} : \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ *auto-adjoint (d'après la proposition VI.10). Soient* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *des valeurs réelles propres de* $f_{\mathbf{C}}$*,* W *et pour tout* $1 \leq i \leq r$*,* $\mathrm{W}_i = \mathrm{Ker}(f_{\mathbf{C}} - \lambda_i \,\mathrm{id}) \subset f_{\mathbf{C}}$*,* $\mathrm{V}_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}) \subset \mathrm{U}$*. Alors pour tout* $1 \leq i \leq n$*,* W_i *est engendré par* V_i*. On a de plus :*

1. $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{W}_i = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{V}_i$,
2. $\mathrm{U} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathrm{V}_i$ *est en somme directe orthogonale,*
3. f *est diagonalisable dans une base orthogonale de* U*.*

Démonstration. On a tout d'abord $\mathrm{V}_j \subset \mathrm{W}_j$. Soit $u + \mathrm{i}v \in \mathrm{W}_j$:

$$\underbrace{f(u + \mathrm{i}v)}_{=\lambda_j(u+\mathrm{i}v)} = \underbrace{f(u) + \mathrm{i}f(v)}_{=\lambda_j u + \mathrm{i}\lambda_j v}.$$

Cela implique que $f(u) = \lambda_j u$ et $f(v) = \lambda_j v$. Donc pour tout $u, v \in \mathrm{V}$, W_j est bien engendré sur $\mathbf{C}$ par V_j.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de V_j sur $\mathbf{R}$ alors $(e_1, \ldots, e_k)$ est un système générateur de W_j sur $\mathbf{C}$. $(e_i, \ldots, e_k)$ est libre dans U implique que $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre dans $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$. On a alors $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de W_j sur $\mathbf{C}$. Donc $k = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{V}_j = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{W}_j$. Comme $\mathrm{U}_{\mathbf{C}} = \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathrm{W}_j$ est en somme directe orthogonale, on a alors :

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{U}_{\mathbf{C}} = \sum_{1 \leq j \leq r} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{W}_j = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{U} = \sum_{1 \leq j \leq r} \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{V}_j.$$

☐

Proposition VI.12. *Soit* U *un espace euclidien,* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$*.* f *est orthogonale si et seulement* $f_{\mathbf{C}}$ *est unitaire.*

Démonstration. f est orthogonale si et seulement si $f \circ f^* = \mathrm{id}_{\mathrm{U}} \Leftrightarrow f_{\mathbf{C}} = (f_{\mathbf{C}})^*$ si et seulement si $f_{\mathbf{C}}$ est unitaire. □

Proposition VI.13. *Soient* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *automorphisme orthogonale et* $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbf{C}$ *tel que* $\lambda^2 \neq 1$ *une valeur propre de* $f_{\mathbf{C}}$*. Soit* $w = u + \mathrm{i}v \in f_{\mathbf{C}}$ *un vecteur propre de* $f_{\mathbf{C}}$ *pour* λ*. Alors :*

(i) (u, v) *est un système libre dans* U *et* $\langle u, v\rangle = 0$*.*

(ii) $\mathrm{Vect}_{\mathrm{U}}(u, v)$ *est stable par* f *et la matrice de* f *dans la base* (u, v) *de* $\mathrm{Vect}(u, v)$ *est :*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (i) Soit λ une valeur propre de $f_{\mathbf{C}}$ et $w \in f_{\mathbf{C}}$ tel que $f_{\mathbf{C}}(w) = \lambda w$. On pose $w = u + \mathrm{i}v$. On a alors :

$$\overline{f_{\mathbf{C}}(w)} = \overline{\lambda}\overline{w} = f_{\mathbf{C}}(\overline{w}.$$

Si $\lambda^2 \neq 1$, cela voudrait dire que $\lambda \neq \overline{\lambda}$. On a alors $\langle w, \overline{w}\rangle_{\mathbf{C}} = 0$.

$$\begin{aligned} \langle u + \mathrm{i}v, u - \mathrm{i}v\rangle_{\mathbf{C}} &= \langle u, u\rangle + \mathrm{i}u, v + \mathrm{i}v, u - \langle v, v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle + 2\mathrm{i}\langle u, v\rangle = 0 \end{aligned}$$

Cela implique donc que $\langle u, v\rangle$ et $\|u\| = \|v\|$. D'autre part, $\mathrm{Vect}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}(w, \overline{w})$ est engendré sur $\mathbf{C}$ par v et v. Cela entraine que (u, v) est un système libre.

(ii)

$$f(u) = f\left(\frac{w + \overline{w}}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{\mathbf{C}}(w) + \overline{w}_{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}(\lambda w + \overline{\lambda}\overline{w}).$$

Comme $|\lambda| = 1$, on peut écrire $\lambda = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et :

$$\begin{aligned} \lambda w = \lambda(u + \mathrm{i}v) &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(u + \mathrm{i}v) \\ &= u\cos\theta - v\sin\theta + \mathrm{i}(v\cos\theta + u\sin\theta). \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} f(u) &= u\cos\theta - v\sin\theta, \\ f(v) &= v\sin\theta + v\cos\theta \end{aligned}$$

et la matrice de f dans la base (u, v) de $\mathrm{Vect}(u, v)$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

□

Théorème VI.14. *Soient* U *un espace euclidien,* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *orthogonal. Alors* U *peut se décomposer en somme directe orthogonale :*

$$\mathrm{U} = \bigoplus_{\theta_i} \mathrm{U}_{\theta_i} \oplus \mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_{-1},$$

avec

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}), \quad \mathrm{U}_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}),$$

et pour tout i, $\dim \mathrm{U}_{\theta_i} = 2r_i$ *est paire. De plus, pour tout* i, *il existe une base orthonormale de* U_{θ_i} *dans laquelle la matrice* f *s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \mathrm{B}_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \mathrm{B}_n \end{pmatrix}$$

tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$ *:*

$$\mathrm{B}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(\theta_i) &&& \\ & \mathrm{A}(\theta_i) && \\ && \ddots & \\ &&& \mathrm{A}(\theta_i) \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \dim \mathrm{B}_i = 2r_i \times 2r_i.$$

Démonstration. On considère le complexifié de f, $f_{\mathbf{C}}$. Soient $p = \dim \mathrm{Ker}(f_{\mathbf{C}} - \mathrm{id})$ et $q = \dim \ker(f_{\mathbf{C}} + \mathrm{id})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres de $f_{\mathbf{C}}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i \neq 1$, on définit :

$$\mathrm{W}_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}) \quad \text{et} \quad k_j = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{W}_{\lambda_j}.$$

On choisit une base orthonormale $(w_1, \ldots, w_{k_j})$ de W_{λ_j}. On a ainsi $\mathrm{W} = \mathrm{W}_{\lambda_j} \oplus \mathrm{W}_{\overline{\lambda}_j}$ tel que $\lambda_j \neq \overline{\lambda}_j$. Une base de cet espace est $(w_1, \ldots, w_{k_j}, \overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{k_j})$. Si on considère $w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ alors la base précédente devient $(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{k_j}, v_{k_j})$ et le matrice de f dans cette base est B_j. □

VI.4 Orientation d'un espace vectoriel réel et angle de rotation

Soient U un espace vectoriel réel tel que $\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{U} = n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de U. On définit la relation $\sim$ d'équivalence suivante :

$$(e_1, \ldots, e_n) \sim (e'_1, \ldots, e'_n) \iff \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(e'_1, \ldots, e'_n) > 0.$$

Définition VI.15. *On a deux classes d'équivalence pour* $\sim$*. Si on choisit une de ces deux classes, on définit une* ortientation *dans l'espace* U*. Si on se limite à des bases orthogonales alors :*

$$\det_{(e_1,\dots,e_n)}(e'_1,\dots,e'_n) = \pm 1.$$

On dit que l'orientation choisit est directe *si*

$$\det_{(e_1,\dots,e_n)}(e'_1,\dots,e'_n) = 1,$$

et indirecte *si*

$$\det_{(e_1,\dots,e_n)}(e'_1,\dots,e'_n) = -1.$$

Si $(e_1,\dots,e_n)$, $(e'_1,\dots,e_n)$ sont deux bases orthonormales, on redéfinira la relation $\sim$ d'équivalence précédente par :

$$(e_1,\dots,e_n) \sim (e'_1,\dots,e'_n) = \det_{(e'_1,\dots,e'_n)}(e_1,\dots,e_n) = 1.$$

Définition VI.16. *Une orientation étant choisie, on définit le* produit mixte *de* n *vecteurs* $(v_1,\dots,v_n)$ *comme étant :*

$$[v_1,\dots,v_n] = \det_{(e_1,\dots,e_n)}(v_1,\dots,v_n).$$

où $(e_1,\dots,e_n)$ *est une base orthonormale directe.*

Remarques VI.17. 1. Si $(e'_1,\dots,e'_n)$ est une autre base orthonormale directe alors :

$$\det_{(e'_1,\dots,e'_n)}(v_1,\dots,v_n) = \underbrace{\det_{(e'_1,\dots,e'_n)}(e_1,\dots,e_n)}_{1}\det_{(e_1,\dots,e_n)}(v_1,\dots,v_n) = \dim_{(e_1,\dots,e_n)}(v_1,\dots,v_n).$$

On a l'équivalence suivante :

$$(v_1,\dots,v_n) \text{ libre } \iff [v_1,\dots,v_n] = 0.$$

Proposition VI.18. *Soit* $v_1,\dots,v_{n-1} \in \mathrm{U}$ *et* $\dim \mathrm{U} = n$*. Il existe un unique vecteur* $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \mathrm{U}$ *tel que pour tout* $u \in \mathrm{U}$ *:*

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, u\rangle = [v_1,\dots,v_{n-1},u].$$

De plus, on a l'équivalence suivante :

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0 \iff (v_1,\dots,v_{n-1}) \textit{ est un système de vecteurs liés.}$$

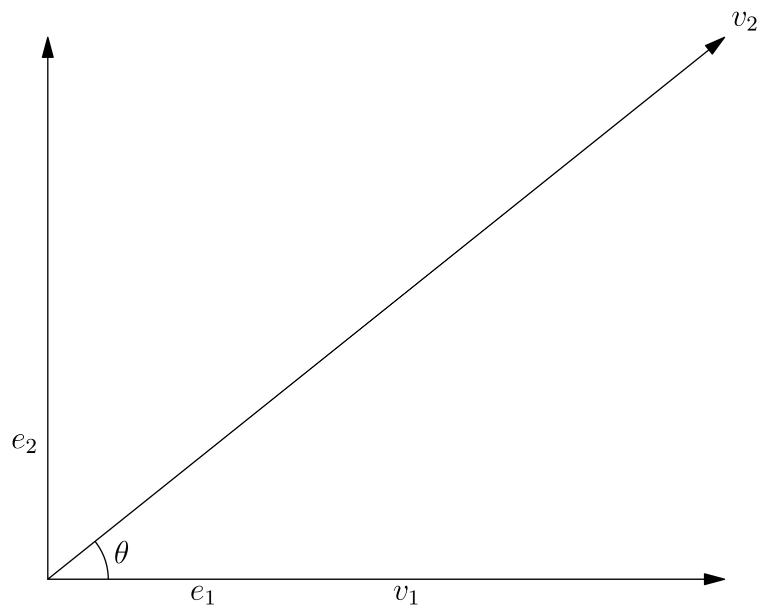

FIG. VI.1 – Angle θ de v_1 et v_2

Exemple VI.19. Soit $\mathrm{U} = \mathbf{R}^3$ et v_1, v_2 deux vecteurs dans $\mathbf{R}^3$. On prend e_1 tel que $v_1 = \|v_1\|e_1$, e_2 tel que (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormale directe. L'angle θ de (v_1, v_2) est tel que :

$$v_2 = \|v_2\|(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2).$$

On a ainsi :

$$v_1 \wedge v_2 = \|v_1\|\|v_2\|e_1 \wedge (e_1\cos\theta + e_2\sin\theta) = \|v_1\|\|v_2\|(e_1 \wedge e_2)\sin\theta. \tag{VI.1}$$

$e_1 \wedge e_2 = e_3$ car :

1. $e_1 \wedge e_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\langle e_1 \wedge e_2\rangle = [e_1, e_2, e_1] = 0$ et $\langle e_1 \wedge e_2, e_2\rangle = [e_1, e_2, e_2] = 0$.
2. $[e_1, e_2, e_1 \wedge e_2] = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2\rangle = 1 \Leftrightarrow (e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormale directe.

Donc :

$$(\text{VI.1}) \iff v_1 \wedge v_2 = \|v_1\|\|v_2\|e_3\sin\theta.$$

Remarque VI.20 (Angle d'une rotation)**.** Soient V un espace euclidien de dimension 2 et (u, v) une base orthonormale directe de V. Si f est une rotation alors la matrice de f dans (u, v) est

$$\mathrm{A}^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

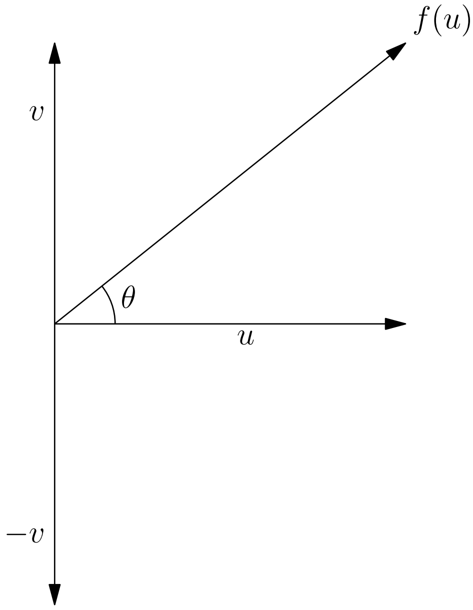

FIG. VI.2 – Angle entre u et $f(u)$

On appelle θ l'angle de la rotation mais cela dépend de l'orientation. Si (u, v) est directe alors $(u, -v)$ est indirecte. La matrice de f dans $(u, -v)$ est :

$$\mathrm{A}^{-} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si (u, v) et (u', v') sont deux bases orthonormales directes et f une rotation alors $\mathrm{A}^{+}_{(u,v)} = \mathrm{A}^{+}_{(u',v')}$.

Index