

M204 : Suites et séries de fonctions

Notes de cours par Clément Boulonne

Table des matières

1	Suites et séries de fonctions	4
1.1	Convergence simple et convergence uniforme	4
1.1.1	Convergence simple	4
1.1.2	Convergence uniforme	5
1.1.3	Critère de Cauchy uniforme	6
1.2	Convergence uniforme et commutation de la limite	8
1.2.1	Théorème de la continuité	8
1.2.2	Commutation des limites	9
1.3	Intégration et dérivation	10
1.3.1	Théorème d'intégration	10
1.3.2	Dérivation	11
1.4	Séries de fonctions	12
1.4.1	Définitions, généralités	12
1.4.2	Une condition nécessaire pour la convergence uniforme	14
1.4.3	Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence absolue : condition de Cauchy	14
1.4.4	Convergence normale	15
1.4.5	Théorème d'Abel-Dirichlet	17
1.5	Interprétation : espaces normés	19
1.5.1	Norme sur un espace vectoriel	19
1.5.2	Convergence de suites dans un espace normé	19
1.5.3	Complétude	20
1.5.4	Interprétation de la convergence normale	20
2	Séries entières	21
2.1	Généralités - Premières propriétés	21
2.1.1	Définition	21
2.1.2	Point de départ : Lemme d'Abel	21
2.1.3	Notion de rayon de convergence	22
2.1.4	Exemples	23
2.1.5	Addition et multiplication des séries entières	25
2.2	Propriétés de la somme d'une série entière	27
2.2.1	Continuité	27
2.2.2	Dérivation	28
2.2.3	Conséquences sur la dérivation des séries entières	30
2.2.4	Primitives	30
2.2.5	Exemples importants	31
2.3	Développement en séries entières	31
2.3.1	Position du problème	31

2.3.2	Conditions suffisantes de développement en série	34
2.3.3	Quelques exemples classiques	35
2.3.4	Développements en série entière et équations différentielles	36
3	Séries de Fourier	41
3.1	Généralités	41
3.1.1	Fonctions continues par morceaux, fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux	41
3.1.2	Périodicité	42
3.1.3	Polynômes trigonométriques	43
3.1.4	Séries de Fourier	45
3.1.5	Écriture réelle de la série de Fourier	45
3.1.6	Premiers résultats dans le cadre préhilbertien	46

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1.1 Convergence simple

Définition 1.1.1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions numériques toute définie sur un même ensemble X . On dit que (f_n) converge simplement sur X si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge.

Définition 1.1.2. La limite simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ est alors la fonction f définie sur X par $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. On dit alors que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur X vers f .

Définition 1.1.3 (Traduction de la **Définition 1.1.1.** et **Définition 1.1.2.**). $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur X vers f si et seulement si on a :

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon, x)) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Exemple 1.1.1. $X = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = |\cos(x)|^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$, la suite $(|\cos x|^n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $|\cos x|$.

- Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $|\cos x| < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x \in \pi\mathbb{Z}$ on a $f_n(x) = 1$ pour tout n , en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

Conclusion : $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque. Les fonctions f_n sont toutes continues sur \mathbb{R} mais ici la limite simple f ne l'est pas.

La convergence simple n'est pas une bonne notion de convergence (des propriétés élémentaires comme la continuité ne sont généralement pas respectés par passage à la limite simple).

Exemple 1.1.2. $X = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Soit $x \in [0, +\infty[$, on étudie la suite numérique $(f_n(x))$.

- Si $x = 0$ $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$
- Si $x > 0$, $f_n(x) = x n^2 a^n$ avec $a = e^{-x} \in [0, 1[$. Par le théorème des croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

1.1.2 Convergence uniforme

Définition 1.1.4. On reprend les mêmes notations que la **Définition 1.1.1.** On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f uniformément sur X si on a la propriété suivante :

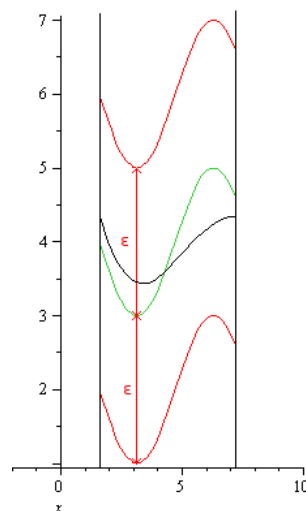
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Comparaison avec la convergence simple On rappelle la définition de la convergence simple

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N_1(\varepsilon, x)) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Ce qui est important : dans la **Définition 1.1.3.** l'entier $N(\varepsilon)$ ne dépend pas d'un point x particulier. Dès que $n \geq N(\varepsilon)$, la majoration $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ est valable en tout point de x de X .

Géométriquement,



A partir du rang $N(\varepsilon)$, le graphe de f_n est entièrement contenu dans une bande de largeur 2ε centré sur le graphe de f .

Remarque. Si $(f_n)_{n \rightarrow 0}$ converge vers f uniformément sur X alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge aussi vers f simplement sur X .

En pratique, on peut donc utiliser la convergence simple pour trouver la limite éventuelle d'une suite de fonctions et ensuite on regarde si la convergence est uniforme sur X .

Exemple 1.1.3. $X = [0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+n} = 0$, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur X . Soit :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x}{x+n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq \varepsilon x + n\varepsilon \Leftrightarrow (1 - \varepsilon)x \leq n\varepsilon \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)x$$

Pour que la propriété $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ soit vérifiée en tout point x de X , il faut et il suffit :

$$\forall x \in X \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)x \leq n$$

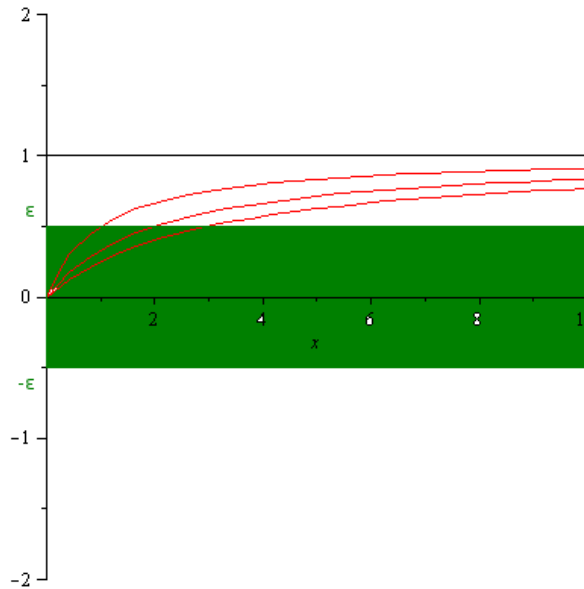
Pour $0 < \varepsilon < 1$, ceci est impossible pcar :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \sup X = +\infty$$

La convergence n'est pas uniforme sur X .

Remarque. La définition de la convergence simple est vérifiée avec $N_1(\varepsilon, x)$ qui est égale au plus petit entier supérieur ou égal à $(\frac{1}{\varepsilon} - 1)x$.

Géométriquement :



$\lim f_n(x) = 1$ pour $x \rightarrow +\infty$ donc Γf_n ne peut être dans la bande $\{(x, y), -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\}$ (pour $\varepsilon < 1$).

1.1.3 Critère de Cauchy uniforme

Critère pratique

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions numériques définies sur X et soit f définie sur X . On pose $M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \in \overline{\mathbb{R}}$. On a la proposition suivante :

Proposition 1.1.1. *La suite $(f_n)_{n \neq 0}$ converge vers f uniformément sur X si et seulement si on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$.*

Remarque. La condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ implique en particulier que la quantité M_n soit finie à partir d'un certain rang.

Démonstration. C'est une reformulation de la **Définition 1.1.3**.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

$$(\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow \left(\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \right) \Leftrightarrow (M_n \leq \varepsilon)$$

□

Exemple 1.1.4. $X = [0, +\infty[$, $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. On a vu dans l'**Exemple 1.1.2.**, que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur X vers :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0$$

On cherche alors M_n

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2 x e^{-nx}$$

$$f'_n(x) = n^2(e^{-nx} + n x e^{-nx}) = n^2(1 - nx)e^{-nx}$$

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	M_n	0

$$M_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n} e^{-\frac{n}{n}} = \frac{n}{e}$$

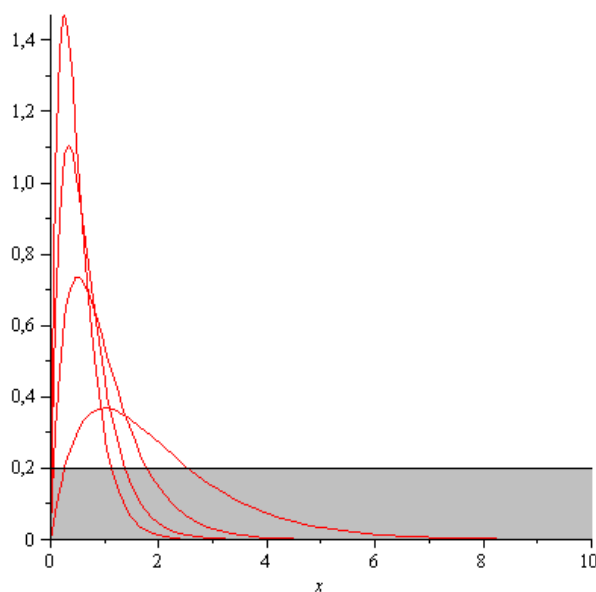
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$ donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Soit un réel $a > 0$, on considère $X_a = [a, +\infty[$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, on a $\frac{1}{n} < a$ à partir d'un certain rang $n(a)$ ($= \lceil \frac{1}{a} \rceil + 1$). pour $n \geq n(a)$, on a donc $\sup_{x \in X_a} |f_n(x) - f(x)| = n^2 a e^{-na} = f_n(a)$.

Si on pose $M_n^{(a)} = \sup_{x \in X_a} |f_n(x) - f(x)|$, on voit ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n^{(a)} = 0$, par conséquent $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers la fonction nulle uniformément sur $[a, +\infty[$ (et ceci pour tout $a > 0$, bien qu'il n'y ait pas convergence uniforme sur $[0, +\infty[$).

Attention : La notion de convergence uniforme n'a de sens si l'on précise sur quel ensemble.

Géométriquement :



La convergence absolue sur \mathbb{R}^+ coince à cause de cette bosse : c'est une bosse glissante (ici, elle est d'hauteur $\frac{n}{e}$ au point d'abscisse 1). Pour $a > 0$, la bosse est à l'extérieur de la $[a, +\infty[$ à partir d'un certain rang et le problème disparaît. D'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Critère de Cauchy uniforme

Theorème 1.1.2. Avec les mêmes notations du paragraphe précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes.

A/ La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f , uniformément sur X .

B/

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall p)(\forall q)(p, q \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon)$$

Démonstration. $(A \Rightarrow B)$ D'après la définition de la convergence uniforme sur X :

$$(\forall \varepsilon > 0)[\exists N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}](\forall n)(n \geq N'(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

On pose $N(\varepsilon) = N'(\frac{\varepsilon}{2})$:

$$p \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left(\forall x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$q \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left(\forall x \in X, |f_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Or $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)|$ et donc :

$$(p \geq N(\varepsilon) \text{ et } q \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)$$

$(B \Rightarrow A)$ Première étape : $B \Rightarrow$ pour tout x de X , la suite numérique $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} et \mathbb{C} . Ainsi $B \Rightarrow \forall x \in X, (f_n(x))_{n \geq 0}$ converge dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} . Cela veut dire que $(f_n)_{n \geq 0}$ a une limite simple f sur X .

Deuxième étape : On reprend B , on fixe un entier $p \geq N(\varepsilon)$. On a alors $\forall x \in X, \forall q \in \mathbb{N}, q \geq p, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. En faisant tendre q vers $+\infty$, $\forall x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On a montré :

$$(p \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

□

1.2 Convergence uniforme et commutation de la limite

1.2.1 Théorème de la continuité

Theorème 1.2.1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions numériques sur un intervalle I sur \mathbb{R} . Soit $x_0 \in I$. Si les f_n sont toutes continues en x_0 et si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f alors f est continue en x_0 .

Remarque. (i) En particulier, si les f_n sont continues sur I et si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f uniformément sur I alors f est continue sur I .

(ii) Le résultat n'est plus vrai si on remplace l'hypothèse de convergence uniforme par la convergence simple.

Démonstration. On sait que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, n) > 0)(\forall x \in I)(|x - x_0| < \delta(\varepsilon, n)) \Rightarrow (|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon) \quad (*)$$

(*) est la continuité de f_n au point x_0 .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \quad (**)$$

(**) est la convergence uniforme de (f_n) sur I .

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_A + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_B + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_C \end{aligned}$$

On fixe un indice $n \geq N(\varepsilon)$, par exemple $n = N(\varepsilon)$ (on a donc $A \leq \varepsilon$ et $C \leq \varepsilon$). On pose alors $\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, N(\varepsilon))$ Posons $|x - x_0| \leq \delta'(\varepsilon)$, on aura $B \leq \varepsilon$. On a démontré :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta'(\varepsilon) > 0)(\forall x \in I)(|x - x_0| \leq \delta'(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon)$$

C'est la continuité de f en x_0 . □

1.2.2 Commutation des limites

Définition 1.2.1. La continuité de f_n s'écrit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$.

La continuité de f en x_0 s'écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque. La conclusion du **Théorème 1.2.1.** peut donc s'écrire

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)}_{f(x)} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)}_{f_n(x)}$$

C'est la convergence uniforme sur I qui a permis de permuter le passage à la limite. On peut généraliser ce résultat.

Théorème 1.2.2 (Théorème de commutation ou de la double limite). Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions définies sur $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que :

1. Pour tout n , la fonction f_n a une limite l_n dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}) au point b .
2. La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers une fonction f uniformément sur I .

Alors :

1. la suite numérique $(l_n)_{n \geq 0}$ a une limite l dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}).
2. $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe et vaut l .

Sous forme condensée 2. s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow b} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow b} f_n(x)$$

Démonstration. D'après le critère de Cauchy uniforme :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall p)(\forall q)(p \geq N(\varepsilon) \text{ et } q \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon)$$

Soient $p \geq N(\varepsilon)$ et $q \geq N(\varepsilon)$. On a :

$$\forall x \in [a, b[, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

On fait tendre x vers b , on obtient :

$$|l_p - l_q| \leq \varepsilon$$

La suite $(l_n)_{n \geq 0}$ est donc de Cauchy dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}), par conséquent, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

De là, on écrit :

$$|f(x) - l| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_A + \underbrace{|f_n(x) - l_n|}_B + \underbrace{|l_n - l|}_C$$

On majore A et C par ε pour un certain $N(\varepsilon)$ assez grand en utilisant :

* la convergence uniforme de (f_n) vers f par A .

* la convergence de (l_n) vers l par C .

L'entier $n = N(\varepsilon)$ étant fixé, on majore B par ε en utilisant l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow b} f_n(x) = l_n$. \square

1.3 Intégration et dérivation

1.3.1 Théorème d'intégration

Théorème 1.3.1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On impose que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a, b]$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues, en particulier, elle est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt$$

On utilise l'hypothèse de la convergence uniforme :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow (\forall t \in [a, b]) |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a})$$

On a alors :

$$(n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left(\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \right) \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

d'où le résultat. \square

Remarque. (i) Le théorème reste vrai si on remplace "continues sur $[a, b]$ " par "Riemann-intégrable sur $[a, b]$ " (f est alors Riemann-intégrable).

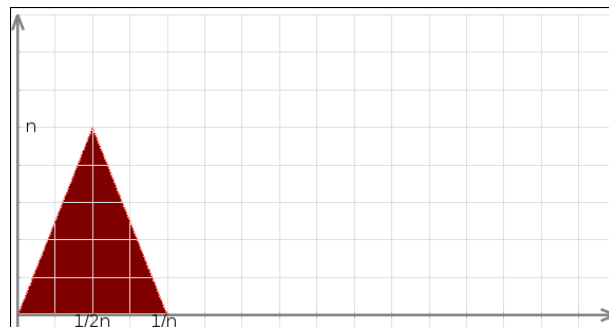
(ii) C'est un théorème de commutation de limites. La conclusion s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \quad (*)$$

et l'intégrale de a à b définie par passage à la limite des sommes de Riemann (ou de Darboux).

(*) est généralement fautive lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[a, b]$.

Exemple 1.3.1. Pour $n \geq 1$, on considère f_n définie sur $[0, 1]$ comme fonction définie par morceaux.



Convergence simple : A partir d'un certain rang, on a $\frac{1}{n} < x$ et $f_n(x) = 0$. En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} = 0$. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout n .

La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2} \text{ (aire du triangle hachuré)}$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2}$. En revanche,

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

La convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$ (ce la impliquerait l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

Remarque. Ici, $M_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n$.

Attention : La convergence uniforme n'est qu'une condition suffisante de commutation. Il peut arriver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$ sans convergence uniforme.

1.3.2 Dérivation

La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables sur un intervalle de \mathbb{R} ne suffit pas, en général, pour obtenir la dérivabilité de la limite.

Exemple 1.3.2. Pour $n \geq 1$, on regarde :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Les f_n sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} (composées d'un polynôme à valeurs > 0 et de la fonction racine). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

qui n'est pas dérivable en 0. Pourtant la convergence est uniforme sur \mathbb{R} . En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

donc $M_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ (en fait $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, il est atteint en $x = 0$). On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ et la convergence est donc uniforme sur \mathbb{R} .

Theorème 1.3.2. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} . On suppose que :

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction f sur I .
2. La suite des dérivées $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur I . Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

Remarque. $f' = g$ peut s'écrire $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$. On a commuté de la limite avec l'opérateur de dérivabilité.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Puisque chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I , on a :

$$\forall x \in I, f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \quad (*)$$

Les f'_n sont continues sur l'intervalle fermé borné $[x_0, x]$ (ou $[x, x_0]$) et $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur cet intervalle vers g . D'après le théorème d'intégration, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans $(*)$ on obtient :

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

f est donc une primitive sur I de la fonction continue h . D'où le résultat. \square

Complément

- (i) Dans les hypothèses du **Théorème 1.3.2.**, la convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f est alors automatiquement uniforme sur les sous-intervalles bornés de I .
- (ii) On peut remplacer partout " \mathcal{C}^1 " par "dérivable" mais la preuve est alors différente (la relation $(*)$ n'est plus vraie).

1.4 Séries de fonctions

1.4.1 Définitions, généralités

Définition 1.4.1. On appelle série de fonctions de terme général f_n la donnée d'un couple $((f_n)_{n \geq 0}, (F_n)_{n \geq 0})$ de suites de fonctions définies sur un même ensemble X et liés par la condition.

$$\forall x \in X, \forall n \geq 0, F_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$$

On note $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général f_n .

Définition 1.4.2. On dit que la série converge simplement (respectivement uniformément) sur X lorsque les suites de sommes partielles $(F_n)_{n \geq 0}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur X . La limite (simple ou uniforme) F de (F_n) est appelée somme de la série et on note :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

Le N -ième reste de la série est la fonction $F - F_N = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Définition 1.4.3. L'étude de la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ se ramène à l'étude pour tout x de X , de la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ lorsqu'il y a convergence et on a : $F(x) = \sum f_n(x)$.

Remarque. Les théorèmes obtenus sur les suites de fonctions peuvent s'adapter immédiatement aux séries de fonctions.

Théorème 1.4.1 (Théorème de continuité). Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série de fonctions sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$. Si les f_n sont toutes continues au points x_0 et si la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de la série est continue en x_0 .

Démonstration. Soit la suite des sommes partielles :

$$F_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$$

L'hypothèse de convergence uniforme dit que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers F .

L'hypothèse de continuité des f_n implique que les F_n sont continues en x_0 . D'après le **Théorème 1.2.1.**, la fonction F est continue en x_0 . \square

Remarque. En particulier, si les f_n sont toutes continues sur I et si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I alors F est continue sur I .

Théorème 1.4.2 (Théorème de commutation ou de "la double limite"). Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série de fonctions sur un intervalle $[a, b]$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que :

- * Pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n a une limite u_n dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) en b .
- * La série de fonctions converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

- * la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

- * Si on appelle $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$, la fonction F a une limite et on a :

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (*)$$

Remarque. La relation (*) s'interprète comme une relation de permutation de limite. En effet, (*) s'écrit aussi :

$$\lim_{x \rightarrow b} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow b} f_n(x)$$

Théorème 1.4.3 (Théorème d'intégration). Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série de fonctions continues sur un intervalle fermé, borné $[a, b]$. On suppose que la série converge uniformément sur $[a, b]$. On appelle F sa somme. Alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(t) dt$ converge et on a :

$$\int_a^b F(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt \quad (**)$$

Remarque. (**) s'écrit encore :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Theorème 1.4.4 (Théorème de dérivation). Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} . On suppose que :

- * la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .
- * la série des dérivées $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur I .

Alors : la somme $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a :

$$F' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$$

Problème. Obtenir des conditions nécessaires, suffisantes, ou nécessaire et suffisante de convergence uniforme d'une série de fonctions à partir du terme général.

1.4.2 Une condition nécessaire pour la convergence uniforme

Proposition 1.4.5. Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Démonstration. Soit $F_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$. L'hypothèse de convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur X se traduit par :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X, |F_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon)$$

où F désigne la somme de la série.

On remarque que $f_n = F_n - F_{n-1}$. Pour $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1$, on a :

$$\forall x \in X, \begin{cases} |F_{n-1}(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$|F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq |F_n(x) - F(x)| + |F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

On a montré :

$$N \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1 \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

C'est la convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur X vers la fonction nulle. □

1.4.3 Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence absolue : condition de Cauchy

Theorème 1.4.6. Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

A/ La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge sur uniformément sur X .

B/ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X, |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon$

Démonstration. C'est une reformulation du critère de Cauchy pour les suites convergentes. En effet, d'après cette condition, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall p)(\forall q)(p \geq N(\varepsilon) \text{ et } q \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall x \in X, |F_p(x) - F_q(x)| \leq \varepsilon)$$

p et q jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $p > q$. La condition $p > q > N(\varepsilon)$ peut s'écrire $q = n$ avec $n \geq N(\varepsilon)$, $p = n + k$ avec $k \geq 1$. On a alors $F_p(x) - F_q(x) = F_{n+k}(x) - F_n(x) = f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)$ et on est ramené à B/. \square

On va maintenant donner deux conditions suffisantes de convergence uniforme de la condition de Cauchy.

1.4.4 Convergence normale

Définition 1.4.4. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X si la quantité :

$$M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$$

est finie à partir d'un certain rang n_0 et si la série numérique $\sum_{n \geq n_0} M_n$ converge.

Theorème 1.4.7. Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X alors elle converge uniformément sur X .

Démonstration. Pour tout x de X , on a :

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+k}(x)| \leq M_{n+1} + \dots + M_{n+k} \quad (*)$$

L'hypothèse de convergence de $\sum_{n \geq n_0} M_n$ implique que cette suite vérifie la condition de Cauchy pour les séries numériques :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*), |M_{n+1} + \dots + M_{n+k}| \leq \varepsilon$$

Compte tenu de la majoration (*) :

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X, |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon)$$

$\sum_{n \geq 0} f_n$ vérifie la condition de Cauchy pour les séries de fonctions, donc convergence uniformément sur X . \square

Remarque (A propos de M_n). $M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$. On a vu que si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers la fonction nulle uniformément sur X , c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$. L'hypothèse de convergence normale est beaucoup plus forte (convergence de $\sum M_n$).

Définition 1.4.5 (Reformulation de la **Définition 1.4.3.**). La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X si et seulement si il existe une suite numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ telle que :

- (i) A partir d'un certain rang $n_0 : \forall n \geq n_0, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq a_n$.
- (ii) $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

Démonstration. On démontre que la **Définition 1.4.3.** et **Définition 1.4.4.** sont équivalentes.

- 1) La convergence normale implique la propriété : il suffit de prendre $a_n = M_n$ pour $n \geq n_0$.
- 2) Réciproquement, la propriété (i) de la **Définition 1.4.4.**, $M_n \leq a_n$ pour $n \geq n_0$. Notons aussi que $M_n \geq 0$ donc $a_n \geq 0$. On conclut que le théorème de comparaison des séries à termes positives : la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n$ implique la convergence $\sum_{n \geq n_0} M_n$.

□

Exemple 1.4.1. Pour $n \geq 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_n &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(n^2 x) e^{-nx}}{1+n^2} \end{aligned}$$

- (i) $\forall n \geq 0, \forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$
- (ii) $\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{1+n^2}$ est une série numérique convergente. Conclusion $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$.

Exemple 1.4.2. Pour tout $n \geq 1$, on considère :

$$\begin{aligned} f_n &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{n^4 + x^2} \end{aligned}$$

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on note F sa somme.
- 2) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
- 3) En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Voir **Séries de Fourier**), montrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{\infty} F(t) dt$$

converge et donner sa valeur.

Réponse :

- 1) $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, +\infty[:$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{n^4} \text{ car } n^4 + x^2 \geq n^4$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément, donc simplement) sur $[0, +\infty[$.

- 2) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Les f_n sont toutes continues sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de continuité, la somme $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- 3) Le théorème de commutation entre \int et \sum ne s'applique pas sur l'intégrale généralisée. On commence par ce qu'on sait faire. Soit $x > 0$. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ est une série de fonctions continues sur $[0, x]$ et converge uniformément sur $[0, x]$. Le théorème d'intégration s'applique sur $[0, x]$, on a :

$$\int_0^x F(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^x f_n(t) dt}_{g_n(x)}$$

$$g_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{n^4 + t^2} = \left[\frac{1}{n^2} \arctan \frac{t}{n^2} \right]_0^x = \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{n^2}$$

Pour $x > 0$, $\int_0^x F(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

Existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x F(t) dt$? On est ramené à un problème de commutation entre $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ et \sum :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, +\infty[, |g_n(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} \times \frac{\pi}{2}}_{a_n}$$

La série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge donc il y a convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$.

Donc $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$. Donc : on peut appliquer le théorème de la double limite. Il dit que :

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ existe (autrement dit que $\int_0^{\infty} F(t) dt$ converge).

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi \times \pi^2}{2 \times 6} = \frac{\pi^3}{12}$ (autrement dit $\int_0^{\infty} F(t) dt = \frac{\pi^3}{12}$).

1.4.5 Théorème d'Abel-Dirichlet

Il peut arriver que la convergence normale ne fonctionne avec des séries alternées (par exemple). On a un autre outil :

Théorème 1.4.8 (Abel-Dirichlet). Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série de fonctions sur un ensemble X . On suppose que $f_n = \varepsilon_n v_n$ où les suites de fonctions $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ ont les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout x de X , on a : $0 \leq \varepsilon_{n+1}(x) \leq \varepsilon_n(x)$.
- (2) La suite de fonctions $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle (en décroissant).
- (3) $(\exists A > 0)(\forall n \geq 0)(\forall x \in X)(|v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq A)$

Alors la suite $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X .

Démonstration. On va montrer que (1), (2) et (3) impliquent la condition de Cauchy. On étudie :

$$f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x) \quad (*)$$

pour $n \geq 0, k \geq 1$ et $x \in X$:

$$(*) = \varepsilon_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + \dots + \varepsilon_{n+k}(x)v_{n+k}(x)$$

On pose, pour tout $p \geq 0$:

$$V_p = v_0 + \dots + v_p$$

Alors :

$$\begin{aligned} (*) &= \varepsilon_{n+1}(x)(V_{n+1}(x) - V_n(x)) + \varepsilon_{n+2}(x)(V_{n+2}(x) - V_{n+1}(x)) + \dots + \varepsilon_{n+k}(x)(V_{n+k}(x) - V_{n+k-1}(x)) \\ &= \underbrace{-V_n(x)\varepsilon_{n+1}(x) + V_{n+1}(x)(\varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_{n+2}(x)) + V_{n+2}(x)(\varepsilon_{n+2}(x) - \varepsilon_{n+3}(x)) \\ &\quad + \dots + V_{n+k-1}(x)(\varepsilon_{n+k-1}(x) - \varepsilon_{n+k}(x)) + \varepsilon_{n+k}(x)V_{n+k}(x)}_{\text{transformée d'Abel}} \end{aligned}$$

La transformée d'Abel est un analogue de l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| &\leq |\varepsilon_{n+1}(x)||V_n(x)| + |\varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_{n+2}(x)||V_{n+1}(x)| + \dots \\ &\quad + |\varepsilon_{n+k-1}(x) - \varepsilon_{n+k}(x)||V_{n+k-1}(x)| + |\varepsilon_{n+k-1}(x)||V_{n+k}(x)| \\ &\leq A[|\varepsilon_{n+1}(x)| + |\varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_{n+2}(x)| + \dots + |\varepsilon_{n+k-1}(x) - \varepsilon_{n+k}(x)| + |\varepsilon_{n+k}(x)|] \\ &= A[\varepsilon_{n+1}(x) + \varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_{n+2}(x) + \dots + \varepsilon_{n+k-1}(x) - \varepsilon_{n+k}(x) + \varepsilon_{n+k}(x)] \\ &\leq A(2\varepsilon_{n+1})(x) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse (2), il existe un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in X, |\varepsilon_{n+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2A}) \\ \Rightarrow (*) \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X \end{aligned}$$

La condition de Cauchy est vérifiée : $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X . □

Exemple 1.4.3.

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{(-1)^n}{x^2 + n} \quad \text{pour } n > 1 \end{aligned}$$

$f_n(x) = \varepsilon_n(x)v_n(x)$ avec $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ et $v_n(x) = (-1)^n$. La propriété (1) est vraie. De plus, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ((2) est vérifiée). On a enfin :

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc : la propriété (3) est vérifiée. Donc on peut appliquer le théorème d'Abel-Dirichlet pour la convergence uniforme de cette série de fonctions.

Remarque. Soit $x \in X$, on a $|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}$. Ainsi : $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge absolument pour aucune valeur de n . Elle ne converge pas normalement sur aucun des sous-ensembles et non vide de \mathbb{R} (la convergence normale sur X impliquerait la convergence absolue en tout $x \in X$).

Remarque. Dans le cas général des séries alternées, $f_n(x) = (-1)^n \varepsilon_n(x)$ où $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ vérifie (1) et (2), on peut aussi justifier la convergence uniforme en utilisant la majoration du reste des séries alternées : $|F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon_{n+1}(x)$.

1.5 Interprétation : espaces normés

1.5.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition 1.5.1. Soit E un espace vectoriel sur K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). On appelle norme sur E tout espace $N : E \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant :

(N1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (séparation)

(N2) $\forall x \in E, \forall k \in K, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité)

(N3) $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Exemple 1.5.1 (Exemples de normes). 1. $E = \mathbb{R}, N = |\cdot|$ (valeur absolue)

2. $E = \mathbb{R}^n, N = \|\cdot\|_2, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3. $E = \mathcal{C}([0, 1])_{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}). Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On a bien $N : E \rightarrow [0, +\infty[$ car la fonction $|f|$ est positive et bornée sur $[0, 1]$ en tant que fonction continue sur un intervalle fermé borné.

(N1) $\sup |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$

(N2) Soient $\lambda \in \mathbb{R} f \in \mathcal{C}([0, 1]), \forall x \in [0, 1]$:

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$$

Donc :

$$N(\lambda f) = \sup_{x \in [0, 1]} |(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \lambda N(f)$$

(N3) Soient f et g dans $\mathcal{C}([0, 1])$:

$$N(f + g) = \sup_{x \in [0, 1]} |(f + g)(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)| \leq N(f) + N(g)$$

N est une norme sur $\mathcal{C}([0, 1])$. On l'appelle la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ et on la note souvent $\|\cdot\|_{\infty}$.

Définition 1.5.2. Un K -espace vectoriel E muni d'une norme N est un espace vectoriel normé. On la note (E, N) .

1.5.2 Convergence de suites dans un espace normé

Définition 1.5.3. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ suite d'éléments d'un espace vectoriel normé (E, N) . On dit que cette suite converge vers l'élément x de E si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(x_n - x) = 0$$

Exemple 1.5.2. 1) $E = \mathbb{R}, N = |\cdot|$: c'est la notion de convergence habituelle dans \mathbb{R}

2) $E = \mathcal{C}([0, 1]), N = \|\cdot\|_{\infty}$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{C}([0, 1])$, soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = M_n$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$$

C'est une convergence uniforme.

1.5.3 Complétude

Définition 1.5.4. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace normé (E, N) si elle vérifie la propriété suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall p)(\forall q)(p \geq P(\varepsilon), q \geq P(\varepsilon)) \Rightarrow (N(x_p - x_q) \leq \varepsilon)$$

Exemple 1.5.3. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: on retrouve la définition habituelle de Cauchy dans \mathbb{R} .

Exemple 1.5.4. $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $(f_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy si elle vérifie la condition de Cauchy pour les suites de fonctions.

Définition 1.5.5. Un espace normé (E, N) est dit complet (ou de Banach) si toute suite de Cauchy dans (E, N) converge dans (E, N) .

Exemple 1.5.5. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Exemple 1.5.6. Une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ (car elle vérifie la condition de Cauchy) et sa limite est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Conséquence. $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

1.5.4 Interprétation de la convergence normale

Définition 1.5.6. Soit (E, N) un espace normé complet. Une série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est dite absolument convergente dans (E, N) si la série numérique $\sum_{n \geq 0} N(x_n)$ converge.

Exemple 1.5.7. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: c'est la notion habituelle de convergence absolue.

Exemple 1.5.8. $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$: $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} \|f_n\| \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \text{ converge normalement sur } [0, 1]$$

La convergence normale sur $[0, 1]$ est la convergence absolue dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Généralités - Premières propriétés

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1. On appelle série entière, toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où f_n est un monôme complexe :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n \end{aligned}$$

Par abus, cette série sera notée $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Exemple 2.1.1. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ est une série entière. Elle converge si on a $|z| < 1$

et on a alors $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Problème. 1. *Qu'est ce qu'on peut dire de la convergence des séries entières ?*

2. *Quels sont les propriétés de la somme ?*

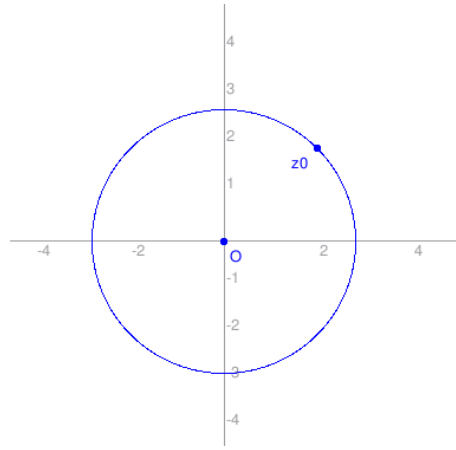
2.1.2 Point de départ : Lemme d'Abel

Lemme 2.1.1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$. Si la série converge au point z_0 alors elle converge absolument en tout point du disque ouvert $D(O, |z_0|)$.

Démonstration. Soit $z \in D(O, |z_0|)$ alors $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$. Puisque $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge, son terme général converge vers 0 et en particulier $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée, $\exists M > 0$ tel que :

$$\forall n, |a_n z_0^n| \leq M$$

On a donc : $|a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$. La série géométrique de terme général $\frac{|z|}{|z_0|}$ converge (car $|z| < |z_0|$). D'après le théorème de comparaison des séries à termes positives : $\sum |a_n z^n|$ converge aussi. Au point z , il y a convergence absolue pour la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. \square



2.1.3 Notion de rayon de convergence

Définition 2.1.2. Soit $a_n z^n$ une série entière. On considère :

$$A = \left\{ r > 0, \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge} \right\}$$

A peut être vide : dans ce cas, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge qu'en $z = 0$. On appelle rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la quantité R définie par :

$$\begin{cases} R = 0 \text{ si } A = \emptyset \\ R = \sup A \text{ sinon} \end{cases}$$

On a : $R = [0, \infty]$, en effet A n'est pas nécessairement borné.

Compte tenu du **Lemme 2.1.1.**, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$. On va voir qu'elle diverge grossièrement (c'est-à-dire que $a_n z^n \not\rightarrow 0$ lorsque $|z| > R$). Si on avait $a_n z^n \rightarrow 0$ alors $\exists M$ tel que $\forall n \geq 0, |a_n z^n| \leq M$. Soit r tel que $R < r < |z|$. On a alors ;

$$|a_n r^n| = |a_n z^n| \left(\frac{r}{|z|} \right)^n \leq M \left(\frac{r}{|z|} \right)^n$$

avec $\frac{r}{|z|} < 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge, ce qui contredit la définition de R .

Caractérisation du rayon de convergence Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est l'unique élément R de $[0, +\infty]$ tel que :

1. la série converge absolument par $|z| < R$
2. la série diverge grossièrement par $|z| > R$

Définition 2.1.3. On appelle disque de convergence de la série, le disque ouvert

$$D(O, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$$

avec la convention $D(O, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$.

Remarque. Au bord du disque de convergence, c'est-à-dire sur le cercle $\{z, |z| = R\}$, le comportement (convergence ou divergence) dépend de la série.

2.1.4 Exemples

On considère les séries entières suivantes :

- (i) $\sum_{n \geq 0} z^n$
- (ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$
- (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$
- (iv) $\sum_{n \geq 0} e^{n^2} z^n$
- (v) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$
- (vi) $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ où a_n est défini par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3p \\ 0 & \text{si } n = 3p + 1 \\ (1 + \frac{1}{p})^{p^2} & \text{si } n = 3p + 2 \end{cases}$$

Calcul des rayons de convergence

On utilise la caractérisation de R .

- (i) Suite géométrique de raison z . Elle converge absolument pour $|z| < 1$.
 Pour $|z| \geq 1$, son terme général ne tend pas vers 0. Elle diverge grossièrement. On a donc $R = 1$.

De plus la suite diverge en tout point du cercle $C(O, 1)$.

- (ii) $\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{|z|^n}{n}$
 Pour $|z| > 1$, on a $\frac{|z|^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$ (croissances comparées). La série diverge grossièrement.
 Pour $|z| < 1$, on a : $\frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$ et $\sum_{n \geq 0} |z|^n$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{|z|^n}{n}$ converge. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge absolument quand $|z| < 1$.

On a donc $R = 1$.

Dans cet exemple, le cercle $C(0, 1)$ contient des points où la série converge (ex : $z = -1$, en fait, pour tout point $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$) et un point où la série diverge ($z = 1$).

- (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$.
 Pour $|z| > 1$, il y a divergence grossière ($\frac{|z|^n}{n^2} \rightarrow +\infty$).
 Pour $|z| \leq 1$, on a $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge.
 On a donc que $R = 1$ et dans cet exemple, il y a convergence en tout point du cercle $C(O, R)$.

- (iv) $\sum_{n \geq 0} e^{n^2} z^n$. On utilise le critère de la racine. On pose $u_n = |e^{n^2} z^n| = e^{n^2} |z|^n$. On a alors :
- $$\sqrt[n]{u_n} = e^n |z|^n.$$

Pour $z \neq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$ et la série diverge grossièrement d'après le critère de la racine.

La série diverge en tout point $z \neq 0$, on a donc $R = 0$.

- (v) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. On utilise le critère de D'Alembert. On pose :

$$u_n = \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!}$$

Pour $z \neq 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le critère de D'Alembert, en tout point z , la série converge.

Donc : on a $R = +\infty$.

- (vi) $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ avec :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3p \\ 0 & \text{si } n = 3p + 1 \\ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p^2} & \text{si } n = 3p + 2 \end{cases}$$

Pour $n = 3p$, on a : $a_n z^n = z^{3p}$. $\sum_{p \geq 1} z^{3p}$ est géométrique de raison z^3 .

– Pour $|z| < 1$, elle converge absolument.

– Pour $|z| > 1$, elle diverge grossièrement.

Pour $n = 3p + 2$, on a $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p^2} z^{3p+2} = a_n z^n$. Soit $u_p = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p^2} |z|^{3p+2}$. On utilise le critère de la racine :

$$\sqrt[p]{u_p} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p |z|^{3+\frac{2}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} e |z|^3$$

On a que :

$$e |z|^3 < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

D'après le critère de la racine :

$$\sum_{p \geq 1} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p^2} z^{3p+2} \begin{cases} \text{converge absolument pour } |z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ \text{diverge grossièrement pour } |z| > \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \end{cases}$$

On s'intéresse maintenant à la somme des deux séries.

- Pour $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, les séries $\sum_{p \geq 1} a_{3p} z^{3p}$, $\sum_{p \geq 1} a_{3p+1} z^{3p+1}$, $\sum_{p \geq 1} a_{3p+2} z^{3p+2}$ convergent absolument.

La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est donc absolument convergente.

- Pour $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, on a $a_{3p+2} z^{3p+2} \not\rightarrow 0$. Donc $\sum_{n \geq 1} a_{3p+2} z^{3p+2}$ diverge grossièrement, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

diverge aussi grossièrement.

On a donc $R = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

2.1.5 Addition et multiplication des séries entières

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b . On suppose R_a, R_b .

Définition 2.1.4. On définit la somme et le produit :

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

avec $c_n = a_n + b_n$ et :

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} d_n z^n$$

où $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$.

Définition 2.1.5. On note R_{a+b} (respectivement R_{ab}) les rayons de convergence respectifs de ces deux réels.

Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$ les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ sont absolument convergentes et d'après les résultats usuels sur l'addition et le produit de séries numériques, on sait que $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} d_n z^n$ sont aussi absolument convergentes.

On en déduit que $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ et $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$.

Proposition 2.1.2. On peut donc un peu plus sur l'addition : si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. En effet, supposons par exemple $R_a < R_b$. On sait déjà que $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R_a$.

Soit ensuite z tel que $R_a < |z| < R_b$.

$$c_n z^n = a_n z^n + b_n z^n$$

Comme $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ converge, on a $b_n z^n \rightarrow 0$ mais comme $|z| > R_a$, on a : $a_n z^n \nrightarrow 0$. Donc $c_n z^n \nrightarrow 0$.

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. On a donc :

$$R_{a+b} = R_a = \min(R_a, R_b)$$

□

Remarque. Si $R_a = R_b$, on peut avoir $R_{a+b} > \min(R_a, R_b)$

Exemple 2.1.2. On prend $\sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} -a_n z^n$ alors $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ est la série nulle et donc $R_{a+b} = +\infty$.

On ne peut rien dire de plus pour le produit, voir l'**Exemple 2.1.3.** (R_a, R_b et R_{ab} distincts).

Exemple 2.1.3. On prend :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \text{ pour } n \geq 0 \\ b_0 = -2, b_n = -5 \times 2^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ s'obtient par addition des séries $\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n$ et $-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{2}\right)^n$.

La série géométrique $\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n$ a pour rayon de convergence 3, sa somme vaut :

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{1}{3 - z} \text{ pour } |z| < 3$$

La série géométrique $-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{2}\right)^n$ a pour rayon de convergence 2, sa somme vaut :

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{-z}{2}} = -\frac{1}{z + 2} \text{ pour } |z| < 2$$

On en tire que $R_n = 2$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{3 - z} - \frac{1}{2 + z} = \frac{2 + z - 3 + z}{(3 - z)(2 - z)} = \frac{2z - 1}{(3 - z)(2 - z)}$$

On a de même :

$$\sum_{n \geq 0} b_n z^n = -2 - \frac{b}{2} \sum_{n \geq 1} (2z)^n$$

Il s'agit encore d'une série géométrique. On a $R_b = \frac{1}{2}$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= -2 - \frac{b}{2} \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2z)^n = -2 - \frac{b}{2} \times \frac{2z}{1 - 2z} \text{ pour } |z| < \frac{1}{2} \\ &= \frac{-2(1 - 2z) - 5z}{1 - 2z} = \frac{-2 - z}{1 - 2z} = \frac{z + 2}{2z + 1} \end{aligned}$$

On étudie la série produit $\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n \geq 0} d_n z^n$. On sait que $R_{ab} \geq \frac{1}{2}$, de plus pour $|z| < \frac{1}{2} = \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

(propriétés du produit des séries numériques). Ici pour $|z| < \frac{1}{2}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \frac{2z - 1}{(3 - z)(2 + z)} \times \frac{z + 2}{2z - 1} = \frac{1}{3 - z}$$

On a :

$$\frac{1}{3 - z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ pour } |z| < 3$$

Soit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \text{ pour } |z| < R_{ab}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ pour } |z| < 3$$

On a montré que $f(z) = g(z)$ pour $|z| < \frac{1}{2}$. On en tire que $d_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$ (unicité du développement en série entière¹).

Conséquence. $R_a = 2, R_b = \frac{1}{2}, R_{ab} = 3$.

2.2 Propriétés de la somme d'une série entière

2.2.1 Continuité

Lemme 2.2.1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors la série converge normalement sur tout disque $D(O, r)$ avec $r < R$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\forall z \in D(O, r), |a_n z^n| \leq |a_n r^n|$$

or $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument car $r < R$, d'où le résultat. □

Attention : En général, il n'y a pas de convergence normale (ni même uniforme) sur $D(O, R)$.

Contre-Exemple 2.2.1. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$ avec $f_n(z) = z^n$. On sait que $R = 1$.

S'il y avait convergence uniforme sur $D(O, 1)$, alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ convergerait uniformément vers la fonction nulle sur $D(O, 1)$. Or :

$$\sum_{z \in D(O, 1)} |f_n(z)| = \sum_{|z| < 1} |z|^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ce n'est donc pas le cas ici.

Conséquence. La somme f d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ est continue sur $D(O, R)$.

Démonstration. Soit $r < R$. La série de fonctions converge normalement, donc uniformément sur $D(O, r)$. Les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $D(O, R)$.

Donc : f est continue sur $D(O, r)$. Elle est donc continue sur :

$$D(O, R) = \bigcup_{0 \leq r < R} D(O, r)$$

□

¹on a évité le calcul de $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ qui est pénible

2.2.2 Dérivation

Lemme 2.2.2. Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont toujours le même rayon de convergence.

Démonstration. Soit R le rayon de convergence $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et R' le rayon de convergence $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$.

1) Soit z avec $|z| < R$: on choisit r avec $|z| < r < R$. Pour $z \neq 0$, on a :

$$|n a_n z^{n-1}| = \left| \frac{n a_n z^n}{z} \right| = \frac{1}{|z|} |a_n r^n| n \left| \frac{z}{r} \right|^n$$

On a $\left| \frac{z}{r} \right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left| \frac{z}{r} \right|^n = 0$ (croissance comparée). En particulier, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \geq 0, n \left| \frac{z}{r} \right|^n \leq M$.

On a donc : $\forall n \geq 0, |a_n z^{n-1}| \leq \frac{n}{|z|} |a_n r^n|$. Comme on a choisi $r < R$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n r^n|$ converge. Donc : $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge absolument. On a montré que si $|z| < R \Rightarrow$ la série dérivée converge absolument.

Par conséquent $R' \geq R$.

2) Soit z tel que $|z| < R'$ on a :

$$\forall n \geq 0, |a_n z^n| = \frac{|z|}{n} |n a_n z^{n-1}| \leq |z| |n a_n z^{n-1}|$$

Comme $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge, il s'ensuit que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Donc $R' \leq R$.

Donc $R' = R$. □

Définition 2.2.1 (\mathbb{C} -dérivabilité). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f définie au voisinage de z_0 dans \mathbb{C} est \mathbb{C} -dérivable en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans \mathbb{C} .

La valeur de cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0 et noté $f'(z_0)$.

Comparaison avec la notion usuelle de dérivée Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Soit f définie sur un disque $D(z_0, r)$. Soit $I = D(z_0, r) \cap \mathbb{R} =]z_0 - r, z_0 + r[$. Alors f est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \Rightarrow f|_I$ est dérivable en z_0 .

En effet, l'existence de $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ implique celle de $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in I} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ (et les deux limites coïncident).

La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dont la restriction à \mathbb{R} est dérivable mais qui ne sont pas \mathbb{C} -dérivable.

Exemple 2.2.1.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

$f|_{\mathbb{R}}$ est l'identité de \mathbb{R} ; en particulier elle est dérivable. Pourtant, f n'est pas \mathbb{C} -dérivable aux points de \mathbb{R} : soit $z_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$z \neq z_0 : \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \overline{\frac{z - z_0}{z - z_0}}$$

Pour $z = z_0 + it$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{it}}{it} = -1$$

Pour $z = z_0 + t$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{t}}{t} = 1$$

La \mathbb{C} -dérivabilité est donc une notion (beaucoup) plus forte que la dérivabilité de fonctions d'une variable réelle.

Theorème 2.2.3. La somme f d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R est \mathbb{C} -dérivable en tout point du disque $D(O, R)$ et on a :

$$\forall z \in D(O, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Démonstration. Soit z_0 quelconque dans $D(O, R)$. On regarde :

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right) \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \quad (*) \end{aligned}$$

Or $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})$ pour $n \geq 1$ ($n = 0 : z^n - z_0^n = 0$). On montre pour $z \in D(O, r)$, $z \neq z_0$:

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})}_{u_n(z)}$$

On choisit un réel r avec $|z_0| < r < R$. Pour $|z| < r$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n(z)| &\leq |a_n| (|z|^{n-1} + |z_0| |z|^{n-2} + \dots + |z_0|^{n-1}) \\ &\leq |a_n| (r^{n-1} + r^{n-1} + \dots + r^{n-1}) \\ &\leq n |a_n| r^{n-1} \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} n |a_n| r^{n-1}$ converge car $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a pour rayon de convergence R et $r < R$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $D(O, r)$. Les u_n sont continues sur $D(O, r)$ (polynômes), par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est continue sur $D(O, r)$, en particulier au point z_0 . On a :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

d'où $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$. □

Remarque. En particulier, f est dérivable au sens usuel sur $] - R, R[$ et :

$$\forall x \in] - R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2.2.3 Conséquences sur la dérivation des séries entières

Conséquence. 1) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$, on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ pour $|z| < R$. On peut répéter l'opération : f' est \mathbb{C} -dérivable sur $D(O, R)$ et on a :

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} \text{ pour } |z| < R$$

En itérant, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.2.4. La somme f d'une série entière est indéfiniment \mathbb{C} -dérivable sur $D(O, R)$ où R est le rayon de convergence, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in D(O, R), f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k)a_n z^{n-k}$$

Remarque. En particulier, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $] -R, R[$ et pour $x \in] -R, R[$, la dérivée k ième $f^{(k)}(x)$ est donnée par l'expression ci-dessus.

2) Pour $z = 0$ dans l'expression de $f^{(k)}(z)$, on trouve :

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

On a la relation :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \text{ pour tout } k \geq 0$$

On en tire alors le principe d'unicité du développement en série entière.

Proposition 2.2.5. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières et soient f et g leurs sommes respectives. Si f et g coïncident au voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

En particulier, si la somme d'une série entière est identiquement nulle au voisinage de 0, alors la série est nulle.

Démonstration.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n \text{ pour tout } n \geq 0$$

□

2.2.4 Primitives

Proposition 2.2.6. Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence

R . Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence R et sa somme F est une primitive de f dans $D(O, R)$.

Démonstration. La série obtenue en dérivant $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ terme à terme est $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. On sait qu'elles ont alors le même rayon de convergence. La théorème de dérivation dit alors que F est \mathbb{C} -dérivable dans le disque $D(O, R)$ et que $F' = f$. □

2.2.5 Exemples importants

Exemple 2.2.2. On part de la série géométrique :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ pour } z \in D(O, 1)$$

Dérivation : Soit $k \in \mathbb{N}$, on dérive k fois :

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} z^{n-k}$$

On pose $p = n - k$:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)}{k!} z^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)!}{p!k!} z^p$$

Primitives : d'après le **Proposition 2.2.6.**, si on pose :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

alors on a : $F'(z) = \frac{1}{1-z}$ pour $z \in D(O, 1)$. On recherche F . Pour $x \in]-1, 1[$, on a : $F'(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $F(x) = \ln(1-x) + c$. $F(0) = 0$ et $\ln(1-0) = 0$, donc : $c = 0$. On a démontré que :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La fonction F donne un sens à $\ln(1-z)$ pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Par exemple :

$$-\ln\left(1 - \frac{i}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$$

De même :

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p} \text{ pour } x \in]-1, 1[$$

2.3 Développement en séries entières

2.3.1 Position du problème

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 dans \mathbb{R} . On dit que f est développable en série entière dans l'intervalle $] -a, a[$ ($a > 0$) si f coïncident sur cet intervalle avec la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq a$.

Il y a des conditions nécessaires pour qu'un tel développement existe :

1) f doit être de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -a, a[$.

2) le développement $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in] -a, a[$ impose :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ pour } n \geq 0$$

On appelle série de Taylor de f , la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$. Si le développement existe, il est donné par la série de Taylor.

On peut alors rencontrer deux problèmes :

- 1) La série de Taylor de f peut avoir une somme différente de f .

Exemple 2.3.1 (Exemple de Cauchy). Soit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

En 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-1/x^2} \rightarrow 0 \text{ (croissance comparée)}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. On montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Finalement f est de classe \mathcal{C}^∞ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$$

(on dit que f est une fonction plate en 0). La série de Taylor de f est la série nulle, sa somme sur \mathbb{R} est la fonction nulle : elle ne coïncide avec f sur aucun voisinage de 0 (car $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$). f ne peut pas être développé en série entière.

- 2) La série de Taylor de f en 0 peut avoir un rayon de convergence nul.

Exemple 2.3.2 (Weierstrass). On considère une série de fonctions $\sum_{p \geq 1} f_p$ où :

$$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{-\sqrt{p}} e^{ipx}$$

$$\forall p \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, |f_p(x)| = e^{-\sqrt{p}}$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 e^{-\sqrt{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sqrt{p})^{-4} e^{\sqrt{p}} = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

D'après la règle de Riemann ($n^\alpha u_n$) : la série numérique $\sum_{p \geq 1} e^{-\sqrt{p}}$ converge. Ainsi $\sum_{p \geq 1} f_p$ converge normalement sur \mathbb{R} , soit f sa somme.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} (somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues).

On voit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f^{(n)} = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^{(n)}$$

On démontre que f est de classe \mathcal{C}^n , $\forall n$. Pour $n = 0$, continuité. Soit la propriété établie au rang n , on considère :

$$f^{(n)} = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^{(n)}$$

On regarde la série dérivée de terme générale :

$$f_p^{(n+1)} : x \rightarrow (ip)^{n+1} e^{-\sqrt{p}} e^{ipx}$$

$\forall p \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, |f_p^{(n+1)}(x)| = p^{n+1} e^{-\sqrt{p}}$. On a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 (p^{n+1} e^{-\sqrt{p}}) = 0$$

D'où la convergence $\sum_{p \geq 1} p^{n+1} e^{-\sqrt{p}}$ et d'où la convergence normale $\sum f_p^{(n+1)}$ sur \mathbb{R} .

- les $f_p^{(n)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- la série $\sum f_p^{(n)}$ converge simplement.
- la série $\sum f_p^{(n+1)}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

On peut appliquer le théorème de dérivation : f est de classe \mathcal{C}^{n+1} et :

$$f^{(n)} = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^{(n+1)}$$

On va étudier la série de Taylor :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

On a alors :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(0)$$

$$f_n^{(k)} = (in)^k e^{-\sqrt{n}} e^{inx}$$

Donc :

$$f_n^{(k)}(0) = i^k n^k e^{-\sqrt{n}}$$

et :

$$f^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-\sqrt{n}}$$

On a donc :

$$|f^{(k)}(0)| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-\sqrt{n}}}_{\text{somme à termes positifs}} \geq \underbrace{(k^2)^k e^{-\sqrt{k}}}_{\text{terme d'indice } k^2 \text{ de la somme}}$$

On a :

$$|f^{(k)}(0)| = k^{2k} e^{-k}$$

On en tire :

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} |z|^k$$

On peut ainsi majorer $k!$:

$$k! = 1 \times 2 \times \dots \times k \leq \underbrace{k \times k \times \dots \times k}_{k \text{ fois}} = k^k$$

donc :

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k^k} |z|^k = \left(\frac{k|z|}{e} \right)^k$$

Par conséquence, si $z \neq 0$, on aura :

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

car :

$$\left(\frac{k|z|}{e} \right)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

En particulier, pour $z \neq 0$, la série de Taylor diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Le rayon de convergence de cette série est nul.

2.3.2 Conditions suffisantes de développement en série

Theorème 2.3.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - a, a[$ ($a > 0$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(A) f est développable en série entière sur $] - a, a[$.

(B) $\forall r \in \mathbb{R}, 0 < r < a, \exists M_r \geq 0, \forall n \geq 0, \forall t \in] - r, r[:$

$$|f^{(n)}(t)| \leq M_r \times \frac{n!}{r^n}$$

Remarque. La partie (A) \Rightarrow (B) devrait être vu dans le module **M305 - Variables complexes**. On l'admet. Elle ne sera pas utilisée par la suite.

Démonstration. (B) \Rightarrow (A) : On utilise la formule de Taylor avec reste lagrangien. Soit $x \in] - a, a[$. On choisit r tel que $0 < |x| < r < a$. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

avec

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |f^{(n+1)}(\theta x)|$$

D'après (B), on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_r \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \leq M_r \times \left(\frac{|x|}{r} \right)^{n+1}$$

On a : $\frac{|x|}{r} < 1$ donc $\left(\frac{|x|}{r} \right)^{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui entraîne que $R_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$$

Ce qui revient à dire que $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge et a pour somme $f(x)$. □

Corollaire. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - a, a[$ ($a > 0$). On suppose $\exists K > 0$ tel que $\forall n \geq 0, \forall t \in] - a, a[, |f^{(n)}(t)| \leq K$. Une telle fonction est développable en séries entières sur $] - a, a[$.

Démonstration. On montre que l'hypothèse implique la propriété (B) du théorème précédent. Soit $r \in]0, a[$. Il suffit de trouver une constante $M_r \geq 0$ tel que $\forall n \geq 0$:

$$K \leq M_r \frac{n!}{r^n}$$

On part du fait que $\frac{r^n}{n!}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (on peut le voir comme conséquence de la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$). La suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ est donc bornée, il existe $C_r > 0$ tel que $\forall n \geq 0, \frac{r^n}{n!} \leq C_r$. On a donc $1 \leq C_r \frac{n!}{r^n}$ et $K \leq K C_r \frac{n!}{r^n}$. Il suffit donc de prendre $M_r = K C_r$. \square

2.3.3 Quelques exemples classiques

Exemple 2.3.3 (Exponentielle et fonctions trigonométriques). On applique le **Corollaire** précédent à $f(x) = e^x$ sur $] - a, a[$ ($a > 0$ quelconque). On a $f^{(n)}(t) = e^t$ pour tout t donc $\forall n \geq 0, \forall t \in] - a, a[$, on a : $|f^{(n)}(t)| \leq e^a$. Le **Corollaire** s'applique avec $K = e^a$. Comme $f^{(n)}(0) = 1$, pour tout n , on trouve :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in] - a, a[$$

Le réel $a > 0$ étant arbitraire, on a en fait :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Comme :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On en tire que :

$$\left. \begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \\ \sinh(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned} \right\} \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour les fonctions circulaires cos et sin, on peut appliquer le **Corollaire** avec $K = 1$. On trouve :

$$\left. \begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \\ \sin(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned} \right\}$$

Remarque. Toutes ces séries ont un rayon de convergence infini. Elles permettent de définir $e^z, \cosh(z), \sinh(z), \cos(z), \sin(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par exemple :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

De cette définition, on peut déduire toutes les propriétés de l'exponentielle comme par exemple $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

$$\left. \begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ e^{z'} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ces séries convergent absolument} \\ \text{puisque la série entière} \\ \text{a un rayon de convergence infini} \end{array}$$

Le produit de Cauchy des deux séries est donc absolument convergent et il aura pour somme $e^z e^{z'}$. On a donc :

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{z^p (z')^{n-p}}{p! n - p!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p (z')^{n-p} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n = e^{z+z'} \end{aligned}$$

On peut ainsi vérifier (calcul direct) que :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i}$$

Exemple 2.3.4 (Série géométrique). On a vu que : $\forall x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2.3.4 Développements en série entière et équations différentielles

Dans certaines situations, on peut :

- 1) expliciter la somme d'une série entière ou développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle.
- 2) on peut résoudre des équations différentielles avec des développements en séries entières.

Application à la première technique

On va développer en série $(1+x)^\alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit :

$$f_\alpha :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1+x)^\alpha$$

On suppose que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, f_α est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1, 1[$. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

$$\forall x \in]-1, 1[, f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha f_{\alpha-1}(x)$$

Par récurrence immédiate :

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)f_{\alpha-n}(x)$$

En particulier :

$$f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

car $f_{\alpha-n}(0) = (1-0)^{\alpha-n} = 1$. La série de Taylor en 0 est :

$$1 + \sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{a_n} z^n$$

On étudie son rayon de convergence.

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$$

Si $|z| < 1$, $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > 1$, il y a divergence grossière. On a donc $R = 1$.

Soit la somme g_α de la série de Taylor de f_α :

$$g_\alpha :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

A-t-on $g_\alpha = f_\alpha$? On remarque que :

$$f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

d'où : $(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^\alpha = \alpha f_\alpha(x)$, f_α est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+x)y' - \alpha y = 0$$

Lemme 2.3.2. Les solutions de (E) sur $]-1, 1[$ sont les fonctions Cf_α avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. (i) Cf_α est solution de (E) :

$$(Cf_\alpha)' = Cf'_\alpha$$

et donc :

$$(1+x)(Cf_\alpha)' - \alpha(Cf_\alpha) = C((1+x)f'_\alpha - \alpha f_\alpha) = 0$$

- (ii) Toutes les solutions sont de ce type. Soit g une solution de (E) sur $] - 1, 1[$. On étudie $h = \frac{g}{f_\alpha}$ sur $] - 1, 1[$. f_α ne s'annule pas sur $] - 1, 1[$ donc h est dérivable sur $] - 1, 1[$ et :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x)f_\alpha(x) - f'_\alpha(x)g(x)}{(f_\alpha(x))^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha}{1+x}g(x)f_\alpha(x) - f'_\alpha(x)g(x)}{(f_\alpha(x))^2} \\ &= \frac{g(x)}{1+x} \times \frac{\alpha f_\alpha(x) - (1+x)f'_\alpha(x)}{f_\alpha(x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{1+x} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = C$ pour tout $x \in] - 1, 1[$.

□

En effet, on en tire que $g_\alpha = Cf_\alpha$ et $g_\alpha(0) = 1$ et $f_\alpha(0) = 1$ donnera alors $C = 1$. On aura obtenu $g_\alpha = f_\alpha$ dans $] - 1, 1[$. Autrement dit :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \forall x \in] - 1, 1[$$

$g_\alpha(x)$ est solution de (E) ?

$$g_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Par dérivation terme à terme dans $] - 1, 1[$, on a :

$$g'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad (*)$$

On fait le changement d'indices : $n = m + 1$.

$$g'_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}{m!} x^m = \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}{m!} x^m$$

Par $(*)$, on a ainsi :

$$xg'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

On en tire :

$$\begin{aligned} (1+x)g'_\alpha(x) &= \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}{m!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{(m-1)!} \right) x^m \\ &= \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{(m-1)!} \left(\frac{\alpha-m}{m} + 1 \right) x^m \\ &= \alpha \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} x^m \right) = \alpha g_\alpha(x) \end{aligned}$$

On a donc bien $(1+x)g'_\alpha(x) - \alpha g_\alpha(x) = 0$ pour $x \in] - 1, 1[$.

Exemple 2.3.5. 1) $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times \dots \times \frac{-2n-3}{2}}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(1 \times 3 \times \dots \times (2n-3))}{2^n n!} \end{aligned}$$

On a : $2^n n! = 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times n = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3.5.7\dots(2n+3)}{2.4.6\dots(2n)} x^n \text{ pour } |x| < 1$$

2) $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3.5.7\dots(2n-1)}{2.4.6.8\dots(2n)} x^n \text{ pour } |x| < 1$$

Si on remplace x par $-x^2$ avec $x \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6.8\dots(2n)} x^{2n}$$

En intégrant, on trouve :

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.7\dots(2n-1)}{2.4.6.8\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ pour } |x| < 1$$

Utilisation de séries entières pour résoudre certaines équations différentielles

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 4xy'' + 2y' + y = 0$$

Admet-elle des solutions développables en série entière sur un intervalle $] -a, a[$? Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $x \in] -R, R[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

f est solution de (E) sur $] -a, a[$ avec $a < R$ et si pour tout $x \in] -a, a[$, on a :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}}_{4xf''(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n}_{2f'(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)} = 0$$

On regroupe suivant le degré des monômes. Pour cela on regarde :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+1)ma_{m+1}x^m$$

On obtient la condition :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-a, a[\quad 2a_1 + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (4(m+1)ma_{m+1} + 2(m+1)a_{m+1} + a_m)x^m &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a_1 + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} ((2m+2)(2m+1)a_{m+1} + a_m)x^m &= 0 \end{aligned}$$

D'après le principe d'unicité du développement en série entière, cette condition équivaut à :

$$\begin{cases} 2a_1 + a_0 = 0 \\ (2m+2)(2m+1)a_{m+1} + a_m = 0 \text{ pour tout } m \geq 1 \end{cases}$$

On obtient la relation de récurrence :

$$a_{m+1} = -\frac{1}{(2m+2)(2m+1)}a_m \quad \forall m \geq 0$$

On peut en déduire une expression explicite des a_m en fonction de a_0 :

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_0 \quad a_2 = \frac{1}{24}a_0$$

Par récurrence immédiate, on trouve :

$$a_m = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!} \text{ pour tout } m \geq 0$$

On détermine le rayon de convergence de la série $\sum_{m \geq 0} a_m x^m$ obtenue.

- si $a_0 = 0$, la série est nulle et elle converge partout. Le rayon est donc infini.
- si $a_0 \neq 0$, la série n'est pas nulle car $a_n \neq 0, \forall n$ et on a :

$$\frac{|a_{m+1}x^{m+1}|}{|a_m x^m|} = \frac{|x|}{(2m+1)(2m+2)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Le rayon de convergence est donc infini. Finalement, l'équation (E) admet pour solutions développables en série entières les fonctions :

$$x \mapsto a_0 \varphi(x)$$

avec :

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^m, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

Ce sont des solutions sur \mathbb{R} tout entier. On peut donner une solution explicite à l'équation différentielle (E) :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $x = t^2$:

$$\varphi(x) = \varphi(t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} = \cos(t) = \cos(\sqrt{x})$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on pose $x = -t^2$

$$\varphi(x) = \varphi(-t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-t)^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} t^{2m} = \cosh(t) = \cosh(-\sqrt{x})$$

Finalement :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{pour } x \geq 0 \\ \cosh(-\sqrt{x}) & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Séries de Fourier

Polycopié de cours : <http://math.univ-lille1.fr/~thilliez/biblio/SFourier.pdf>

3.1 Généralités

3.1.1 Fonctions continues par morceaux, fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux

Définition 3.1.1. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ de $[a, b]$ tel que pour tout $j = 0, \dots, N - 1$, on ait :

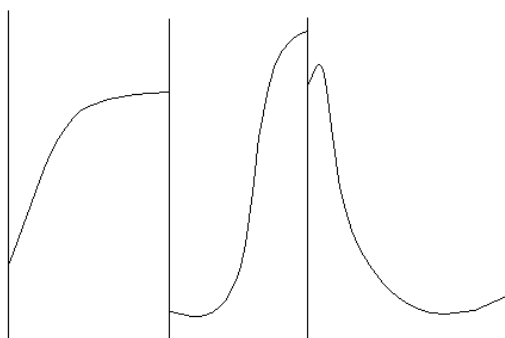
- (i) $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ est continue
- (ii) Les limites $\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f(x)$ existent.

Définition 3.1.2. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ telle que $j = 0, \dots, N - 1$, on ait :

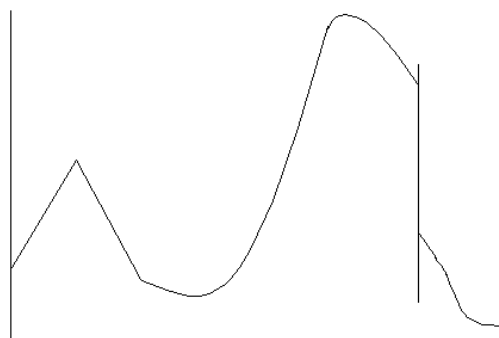
- (i) $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ est de classe \mathcal{C}^1
- (ii) les limites $\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_j^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f'(x)$ existent.

Attention : $f'(x_j)$ n'existe pas en général.

Remarque. \mathcal{C}^1 par morceaux $\Rightarrow \mathcal{C}^0$ par morceaux.



\mathcal{C}^0 par morceaux



\mathcal{C}^1 par morceaux

Remarque. 1. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors elle est Riemann-Intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

2. Si f est \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[a, b]$, f' est définie sur $[a, b]$ sauf pour des points, au plus en nombre finis, x_j .

On convient de poser encore :

$$\int_a^b f'(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)dx \quad 1$$

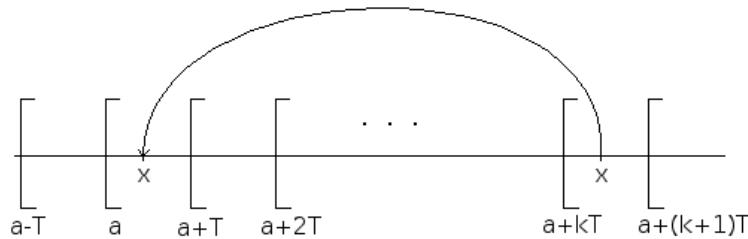
3.1.2 Périodicité

Définition 3.1.3. Soit un réel $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite T -périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x + T) = f(x)$$

Définition 3.1.4. On appelle intervalle fondamentale de f tout intervalle $[a, a + T[$ avec $a \in \mathbb{R}$. La donnée de f sur l'intervalle fondamentale donne f sur \mathbb{R} tout entier.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$:

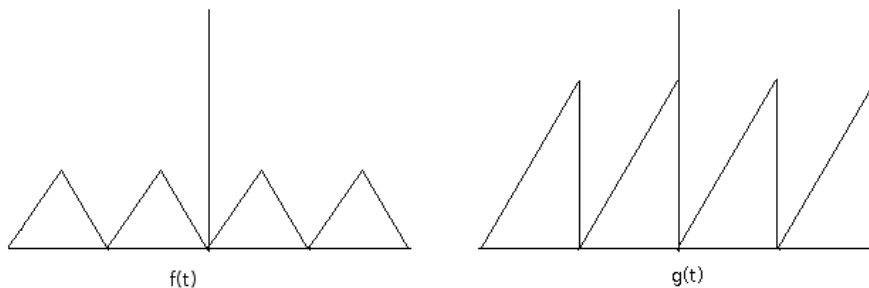


il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a + kT \leq x < a + (k + 1)T$. On a alors :

$$f(x) = f(x - kT) \text{ et } x - kT \in [a, a + T[$$

Attention : Il faut bien préciser l'intervalle fondamental sur lequel on définit une fonction périodique.

Exemple 3.1.1. Soit f (respectivement g) la fonction 1-périodique sur \mathbb{R} donnée par $f(t) = |t|$ (respectivement $g(t) = |t|$) pour $t \in [-1/2, 1/2[$ (respectivement pour $t \in [0, 1[$).



Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ ne sont pas égales.

Définition 3.1.5. Une fonction T -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux (respectivement \mathcal{C}^1 par morceaux) si elle l'est pour tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (respectivement \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[a, b]$).

¹Cette intégrale a un sens car f' se prolonge continuellement sur $[x_j, x_{j+1}]$

Remarque. Pour cela, il suffit qu'elle le soit sur l'intervalle $[a, a + T]$.

Lemme 3.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -périodique continue par morceaux. L'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépend pas de a .

Exemple 3.1.2. $T = 2\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

Démonstration.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Dans la dernière intégrale, on fait un changement de variables : $x = y + T$, $dx = dy$, $y \in [0, a]$:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a \underbrace{f(y+T)}_{f(y)} dy$$

Il reste :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

□

3.1.3 Polynômes trigonométriques

Définition 3.1.6. On appelle polynôme trigonométrique toute fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et les c_n sont des coefficients complexes.

Exemple 3.1.3.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{-ix} + \frac{1}{2i}e^{ix}$$

$N = 1$, $c_{-1} = -\frac{1}{2i}$, $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{2i}$ La donnée de P permet de déterminer d'une manière unique l'entier N (degré du polynôme trigonométrique) et les coefficients c_n , $-N \leq n \leq N$.

En effet, pour $-N \leq n \leq N$, on a :

$$P(x)e^{inx} = \left(\sum_{p=-N}^N c_p e^{ipx} \right) e^{inx} = \sum_{p=-N}^N c_p e^{i(p-n)x}$$

$$\int_0^{2\pi} P(x)e^{inx} dx = \sum_{p=-N}^N c_p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)x} dx$$

Si $n = p$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)x} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$$

Si $n \neq p$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)x} dx = \left[\frac{e^{i(p-n)x}}{i(p-n)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Donc :

$$\sum_{p=-N}^N c_p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)x} = 2\pi c_n$$

On trouve :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) e^{-inx} dx$$

ou encore :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) e^{-int} dt \text{ pour } -N \leq n \leq N$$

Remarque. On montre que l'on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t) e^{-int} dt = 0$$

pour $|n| > N$. Ces résultats établissent l'unicité de l'écriture de $P(x)$. En effet, le degré peut être caractérisé comme le plus grand entier N tel que l'une des intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(t) e^{-iNt} dt \text{ ou } \int_{-\pi}^{\pi} P(t) e^{iNt} dt$$

soit non nulle. De là, les coefficients c_n sont déterminés de façon unique.

Définition 3.1.7. Soit f une fonction 2π -périodique continue par morceaux sur \mathbb{R} . Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on appelle coefficient de Fourier de rang n de la fonction f , le nombre :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Remarque. (i) On a aussi $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt$ par périodicité.

(ii) Pour un polynôme trigonométrique P de degré N , on a donc :

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{P}(n) e^{int}$$

Propriété 3.1.2. (i) $\hat{f}(n)$ dépend linéairement de f .

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $g(t) = f(t+a)$. Alors : $\hat{g}(n) = e^{ina} \hat{f}(n)$.

(iii) Si f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , on a :

$$\hat{f}'(n) = in \hat{f}(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. (i) évident

(ii) par changements de variables

(iii)

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) \frac{e^{int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \right)$$

Le terme [] disparaît puisque $f(t) e^{int}$ a la même valeur pour $t = \pi$ et pour $t = -\pi$, il reste :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{in} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{int} dt = \frac{1}{in} \hat{f}'(n)$$

□

Remarque. On a utilisé le fait que f soit de classe \mathcal{C}^1 pour pouvoir intégrer par parties. On peut montrer que la relation est vraie pour f

1) de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

2) continue sur \mathbb{R}

3.1.4 Séries de Fourier

Soit f une fonction 2π -périodique, continue par morceaux. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle N -ième somme de Fourier de f le polynôme trigonométrique $P_N f$ donné par :

$$P_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

Remarque. C'est un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$. On dit que la série de Fourier de f converge simplement (respectivement uniformément) sur un sous-ensemble X de \mathbb{R} si la suite de fonctions $(P_N f)_{N \geq 0}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur X . La limite de la suite se note alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad \forall x \in X$$

On l'appelle la somme de la série de Fourier elle-même noté $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$.

Problème. (i) conditions de convergence simple ou uniforme sur un sous-ensemble X (avec X à déterminer).

(ii) relation entre la somme de la série et f ?

3.1.5 Écriture réelle de la série de Fourier

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(-n) e^{-inx} + \hat{f}(n) e^{inx} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt \right) e^{-inx} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{in(t-x)} + e^{-in(t-x)}) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times 2 \cos(n(t-x)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) dt = a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \end{cases}$$

On pose $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pour $n \geq 1$. On a :

$$P_N f = \hat{f}(0) + f_1 + \dots + f_N$$

On pose :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

de sorte que $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$. En posant $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$, on voit que $P_N f$ s'identifie à la N -ième somme partielle de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$. La convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ équivaut donc à la convergence simple ou uniforme de cette série

de fonctions sur X . La somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$, lors qu'elle existe, coïncide alors avec la somme de cette série. C'est-à-dire :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

avec :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \end{cases}$$

Remarque. Si f est à valeurs réelles, on a :

$$\begin{cases} a_n = 2\operatorname{Re}\hat{f}(n) \\ b_n = -2\operatorname{Im}\hat{f}(n) \end{cases}$$

3.1.6 Premiers résultats dans le cadre préhilbertien

Soit E l'espace vectoriel de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques continues par morceaux. Pour f et g dans E , on pose :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

On a une application :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f|g \rangle \end{aligned}$$

qui vérifie :

(i)

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g \rangle &= \lambda_1 \langle f_1 | g \rangle + \lambda_2 \langle f_2 | g \rangle \\ \langle f | \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle &= \overline{\lambda_1} \langle f | g_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle f | g_2 \rangle \end{aligned} \quad (*)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in E$, $g_i \in E$, $i = 1, 2$. On appelle $(*)$, une forme séquilinéaire.

(ii) $\overline{\langle f|g \rangle} = \langle g|f \rangle$ propriété de symétrie hermitienne

(iii) $\langle f|f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \geq 0$ positivité

(iv) $\langle f|f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0 \Leftrightarrow f$ est nulle sauf peut-être en ses points de discontinuités.

Ce n'est pas un produit scalaire sur E .

Soit F le sous-espace $\{f \in E, f \text{ continue à droite}\}$. Pour une telle fonction, f nulle en dehors des points de discontinuités $\Rightarrow f$ est nulle. En effet, soit a un point de discontinuité de f . Au voisinage de a , a est le seul point de discontinuité de f (car f est \mathcal{C}^0 par morceaux) donc $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = 0$. Or puisque f est supposée continue à droite $f(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$.

En restriction à F , l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ est un produit scalaire (forme séquilinéaire hermitienne définie positive). Soit pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n : x \mapsto e^{inx}$. On a : $e_n \in F$.

Lemme 3.1.3. *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans F .*

Attention : On ne parle pas de base ici.

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle e_m | e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_m(t) \overline{e_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.4. Pour $f \in F$, on a $\hat{f}(n) = \langle f | e_n \rangle$

Démonstration. Immédiat !

□

Soit F_N le sous-espace de F formé des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$. Autrement dit :

$$F_N = \text{Vect}\{e_{-N}, e_{-N-1}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{N-1}, e_N\}$$

Lemme 3.1.5. $\forall f \in F$, $P_N f$ est la projection orthogonale de f sur F_N .

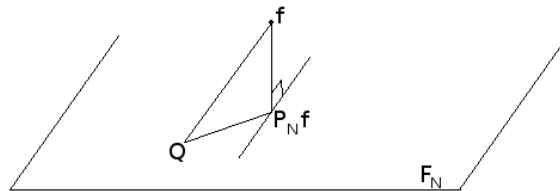
Démonstration. On a $P_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$ pour tout x . Donc :

$$P_N f = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n = \sum_{n=-N}^N \langle f | e_n \rangle e_n$$

Donc $P_N f \in F_N(1)$ et $f - P_N f \perp F_N(2)$ car pour $n \in \{-N, \dots, N\}$, on a : $\langle f - P_N f | e_m \rangle = \langle f | e_m \rangle - \langle P_N f | e_m \rangle$ et $\langle P_N f | e_m \rangle = \langle f | e_m \rangle$ par le **Lemme 3.1.3**.

(1) et (2) caractérisent le projeté orthogonal :

□



Remarque. Soit Q un élément quelconque de F_N :

$$\|f - Q\|^2 = \|f - P_N f\|^2 + \|P_N f - Q\|^2 \geq \|f - P_N f\|^2$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $P_N f = Q$. Parmi les éléments de F_N , la somme de Fourier $P_N f$ est donc celle qui réalise la meilleure approximation de f au sens des moindres carrés :

$$h \mapsto \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \langle h | h \rangle^{\frac{1}{2}}$$

norme de l'écart quadratique moyen

Theorème 3.1.6 (Egalité de Parseval). Soit f une fonction 2π -périodique continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ converge et on a :

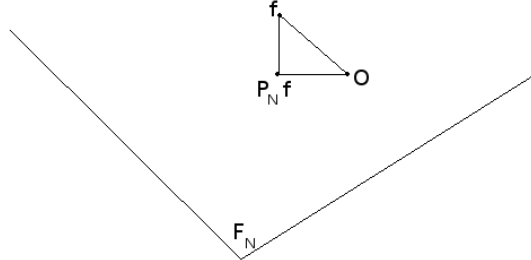
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Démonstration. On va démontrer l'inégalité de Besse, c'est-à-dire la convergence de la série + la majoration :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

La démonstration de l'égalité de Parseval est à voir dans le poly.

1) $f \in F$



D'après le théorème de Pythagore :

$$\|f\|^2 = \|P_N f\|^2 + \|f - P_N f\|^2$$

En particulier :

$$\|P_N f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\|P_N f\|^2 = \left\| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n \right\|^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$$

Soit $A_N = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$. On a donc $A_N \leq \|f\|^2$. De plus $A_N - A_{N-1} = |\hat{f}(-N)|^2 + |\hat{f}(N)|^2 \geq 0$ donc $(A_N)_{N \geq 0}$ est une suite croissante. Par conséquent, la suite $(A_N)_{N \geq 0}$ converge. C'est par définition, la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$. De plus :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

L'inégalité de Bessel est donc démontrée pour les éléments de F .

2) Cas général de $f \in E$. On définit $f_0 \in F$ par :

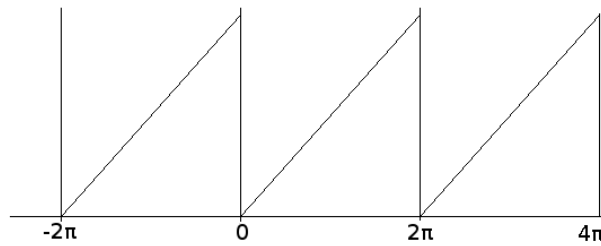
$$\begin{cases} f_0(t) = f(t) \text{ aux points de continuité de } f \\ f_0(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \text{ aux points de discontinuités} \end{cases}$$

Sur $[-\pi, \pi]$, f et f_0 coïncident sauf un nombre fini de points $\hat{f}(n) = \hat{f}_0(n)$ et :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_0|^2$$

L'inégalité de Bessel pour f est donc une conséquence de l'inégalité de Bessel pour f_0 . □

Exemple 3.1.4 (Utilisation de l'égalité de Parseval). Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Soit f la fonction 2π -périodique donnée par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.



On trouve $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{n}$ pour $n \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{i}{n} \right| + \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i}{n} \right|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \pi^2$$

On en tire :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$